

# Die Newtonsche Gravitationskonstante $G$

## 1. Einleitung

In der Newtonschen Physik wird davon ausgegangen, dass die Gravitationskonstante  $G$  eine universelle Konstante ist, und keine Orts- und/oder Zeitabhängigkeit aufweist. Der bekannte „Alternativdenker“ Dieter Grosch widerspricht dem – allerdings ohne dafür Nachweise vorlegen zu können. Er betrachtet  $G$  als Eigenschaft von Himmelskörpern. So will er z.B. der Erde ein bestimmtes  $G$  zuordnen, und anderen Himmelskörpern - etwa dem Mond oder der Sonne - andere  $G$ -Werte. Das ist vermutlich dadurch entstanden, dass er nur die Gleichung für die Kreisbewegung eines Satelliten der Masse  $m$  um einen Zentralkörper mit Masse  $M \gg m$  betrachtet:

$$F_{gr} = F_z$$
$$G \frac{M m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$
$$G M = v^2 r .$$

Dies könnte so fehlinterpretiert werden, dass  $G$  eine Eigenschaft des Himmelskörpers bzw. der Masse wäre.

## 2. Messung von $G$ auf der Erde

Die Bestimmungen von  $G$ , die auf der Erde durchgeführt wurden, sind so ausgeführt, dass dabei nur die gravitierenden Testmassen aufeinander wirken, und die Erdanziehung sich nicht auf die Messung auswirkt. Das ist schon bei dem klassischen Versuch mit der Torsionswaage so: Der Torsionsfaden weist in Richtung der Fallbeschleunigung, und die zwischen den Testmassen wirkenden Kräfte liegen in einer Ebene senkrecht zur Erdanziehungskraft - siehe z.B. hier:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationswaage>

Einen kurzen historischen Überblick über solche Messungen und auch über Variationen davon kann man in folgender Arbeit finden:

<https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/binary/7SUBNBPTPZBPEZP7T6KN3WYK4IAZHHD/full/1.pdf>

Dort wird auch eine moderne Messmethode vorgestellt: das Fabry-Pérot-Gravimeter. Auch dabei sind die zu messenden Gravitationskräfte senkrecht zur Erdanziehungskraft.

Als erster Punkt ist also festzuhalten:

- *Das bekannte  $G$  wird natürlich auf der Erde gemessen, es ist aber keine Eigenschaft der Erde als Himmelskörper.*

Nun könnte man weiter fragen, ob  $G$  dann eine Eigenschaft der Massen ist. Auch das ist nicht der Fall, denn die vielen Messungen von  $G$  wurden auch mit vielen verschiedenen großen Massen ausgeführt - beim genannten Fabry-Pérot-Gravimeter werden sogar zwei Massen von 576 kg verwendet. Das Ergebnis aller solcher Messungen ist stets dasselbe  $G$ .

Als zweiter Punkt ist also zu vermerken:

- *Die Gravitationskonstante ist auch keine Eigenschaft einer Masse, sie hat also nicht den Charakter einer Materialkonstanten.*

Der eigentlichen Bedeutung von  $G$  kommt man näher, wenn man sich klar macht, wie  $G$  überhaupt in die Gleichungen kommt. Grundlage ist die Tatsache, dass zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  wechselseitig eine anziehende Kraft aufeinander ausüben:  $m_1$  zieht  $m_2$  mit einer Kraft  $F_{1,2}$  an, und  $m_2$  zieht  $m_1$  mit einer gleich großen Kraft  $F_{2,1}$  an - daher der Begriff *Wechselwirkung*. Schon Newton wusste, dass diese Wechselwirkungskraft proportional zu den Massen und umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat ist:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} .$$

Da keine weiteren Einflussgrößen bekannt sind, welche die gravitative Wechselwirkung bestimmen, wird in der Newtonschen Physik nun eine Gravitationskonstante  $G$  eingeführt:

$$F = \frac{m_1 \cdot G \cdot m_2}{r^2} .$$

Sie ist unabhängig von den Massen, wie schon oben ausgeführt, und die hier gewählte Schreibweise bringt zum Ausdruck, was  $G$  wirklich ist:

- $G$  ist eine Eigenschaft der Gravitationswechselwirkung zwischen Massen.

Nebenbei bemerkt: Wenn  $G$  auf eine geeignete Weise gemessen wurde, dann erhält man natürlich die Masse der Erde, z.B. aus

$$F_G = m g = \frac{m \cdot G M_E}{R_E^2}$$

$$M_E = \frac{F_G \cdot R_E^2}{m G} .$$

### 3. Die Gravitationskonstante auf anderen Himmelskörpern

#### 3.1 Gravitationskonstante auf dem Mond

Es wird die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond betrachtet. Angenommen, die  $G$ -Werte von Erde  $G_E$  und Mond  $G_M$  wären verschieden; dann zieht die Erde den Mond an mit der Kraft

$$F_{E,M} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2}$$

und der Mond zieht die Erde an mit der Kraft

$$F_{M,E} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} .$$

Nach dem dritten Newtonschen Axiom – dem Wechselwirkungsprinzip – sind diese Kräfte gleich groß:

$$F_{E,M} = F_{M,E} ,$$

$$\frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2}$$

Multiplikation mit  $r_{E,M}^2$  :

$$M_M \cdot G_E \cdot M_E = M_E \cdot G_M \cdot M_M$$

Division durch  $M_E \cdot M_M$  :

$$G_E = G_M .$$

Die  $G$ -Werte von Erde und Mond stimmen also überein.

### 3.2 Die Gravitationskonstante auf Sonne und Planeten

Betrachtet man jetzt das System Sonne – Erde, dann ergibt sich bei Annahme verschiedener Werte  $G_E$  und  $G_S$  aus dem Wechselwirkungsprinzip, dass die  $G$ -Werte tatsächlich gleich sind:  $G_S = G_E$  .

Da nun  $G_S$  bekannt ist, kann die Überlegung auf andere Planeten  $P$  statt der Erde übertragen werden. Daraus ergibt sich die Gleichheit der Gravitationskonstanten auf den Planeten mit der Gravitationskonstanten der Erde:  $G_P = G_S = G_E$  .

## 4. Bestimmung von Gravitationskonstante und Masse eines Himmelskörpers

Ein Himmelskörper mit der Masse  $M_Z$  und der angenommenen Gravitationskonstanten  $G_Z$  wird von einem Satelliten der Masse  $m \ll M_Z$  auf einer Kreisbahn umlaufen. Die anziehende Gravitationskraft  $F_{gr}$  ist die Zentripetalkraft  $F_z$  der Bewegung des Satelliten, und aus  $F_{gr} = F_z$  folgt:

$$G_Z M_Z = v^2 r .$$

Sind nur Geschwindigkeit und Bahnradius bekannt, kann auch nur das Produkt  $G M$  angegeben werden. Sollen  $G_Z$  und  $M_Z$  ermittelt werden, so muss jeweils eine Größe –  $G_Z$  oder  $M_Z$  – unabhängig von der jeweils anderen Größe –  $M_Z$  oder  $G_Z$  – ermittelt werden. Nach Abschnitt 3 ist bekannt, dass die Gravitationskonstante auf Sonne und Planeten mit der Gravitationskonstanten  $G_E$  übereinstimmt, die auf der Erde gemessen wird. Zur Erweiterung sollen hier am Beispiel des Mondes noch zwei Vorgehensweisen vorgestellt werden, die die unabhängige Bestimmung von  $G$  und  $M$  ermöglichen.

### 4.1. Bestimmung von $M_M$ , dann $G_M$

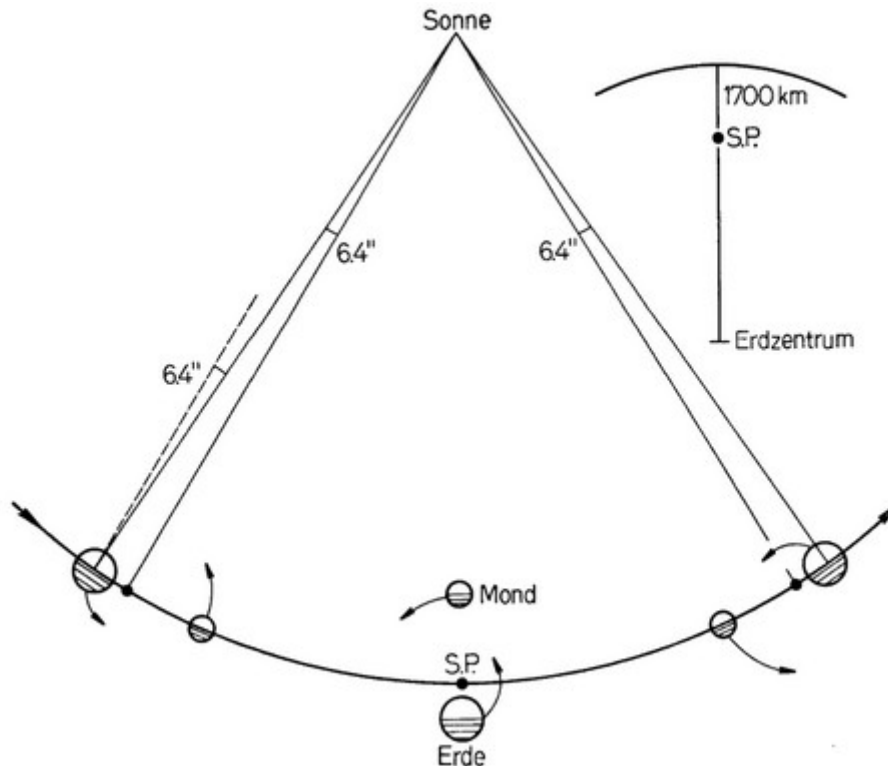
#### 4.1.1 Die Masse des Mondes

In „F. Link: Der Mond; Springer-Verlag“ wird auf den Seiten 10 bis 12 eine interessante Möglichkeit zur Bestimmung der Mondmasse aus astronomischen Beobachtungen vorgestellt. Dies ist auch online einsehbar:

<https://books.google.de/books?id=F40iBgAAQBAJ&pg=PA10&dq=bestimmung+der+mondmasse&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwjWIKPx1ITPAhVHthQKHRvzD7AQ6AEISzAI#v=onepage&q=bestimmung%20der%20mondmasse&f=false>

Hier eine Kurzfassung:

Mond und Erde umlaufen gemeinsam den Schwerpunkt des Systems Erde - Mond. Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich auf einer Ellipse um die Sonne ("Erdbahn"). Der Umlauf um den Schwerpunkt des Systems führt dazu, dass sich die Erde periodisch vor oder hinter dem Schwerpunkt befindet:



(aus F. Link: Der Mond; Abbildung 7, Seite 10)

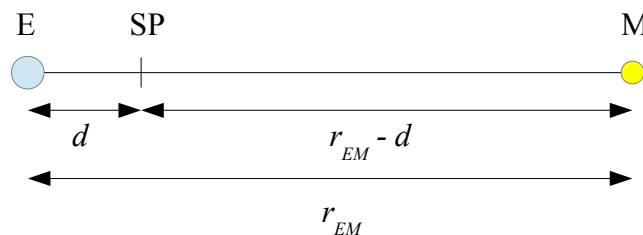
Als Folge davon wird die Lage der Sonne als periodisch verlagert wahrgenommen. Der dabei auftretende Winkel ist

$$\delta = 6,4 \text{ Bogensekunden} = 1,778 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ = 3,1028 \cdot 10^{-5} \text{ rad.}$$

Die Entfernung des Schwerpunkts SP vom Erdmittelpunkt ergibt sich unter Verwendung von  $\delta$  und dem Abstand Erde – Sonne  $r_{E,S} = 1 \text{ AE}$  zu

$$d = r_{E,S} \cdot \delta = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m} \cdot 3,1028 \cdot 10^{-5} = 4,6418 \cdot 10^6 \text{ m.}$$

Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt auf der Verbindungslinie der Massenzentren:



Es gilt der aus der Mechanik bekannte Zusammenhang für die Lage des Schwerpunktes zweier (Punkt-)Massen:

$$\frac{d}{r_{E,M}} = \frac{M_M}{M_E + M_M}.$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d \cdot (M_E + M_M) &= M_M \cdot r_{E,M} \\ d \cdot M_E &= M_M \cdot (r_{E,M} - d) \end{aligned}$$

$$M_M = M_E \cdot \frac{d}{r_{E,M} - d}$$

$$= 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{4,642 \cdot 10^6 \text{ m}}{(3,844 \cdot 10^8 - 4,642 \cdot 10^6) \text{ m}}$$

$$M_M = 7,302 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

Die Mondmasse lässt sich also aus astronomischen Beobachtungen auf der Erde bestimmen, *ohne dabei  $G_M$  zu verwenden*.

#### 4.1.2 Bestimmung von $G_M$

In

<http://www.leifiphysik.de/mechanik/freier-fall-senkrechter-wurf/versuche/fallbeschleunigung-auf-dem-mond>

wird der Sprung eines Astronauten auf dem Mond ausgewertet.

1. Aus dem Material ergibt sich eine Fallbeschleunigung von etwa  $g_M = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .
2. Aus dem Gravitationsgesetz folgt:

$$g_M = \frac{G_M \cdot M_M}{R_M^2}$$

umgestellt nach  $G_M$ :

$$G_M = \frac{g_M \cdot R_M^2}{M_M}$$

3. Die Mondmasse ist nach 4.1.1 bekannt, der Mondradius ist ebenfalls bekannt, so dass sich ergibt:

$$G_M = \frac{1,6 \text{ m/s}^2 \cdot (1,738 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{7,302 \cdot 10^{22} \text{ kg}}$$

$$G_M = 6,62 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$$

Wie nicht anders zu erwarten war, ist  $G_M = G_E = G$ .

## 4.2 Berechnung von $G_M$ , dann $M_M$

### 4.2.1 Berechnung von $G_M$

Anziehungskraft der Erde auf den Mond:

$$F_{E,M} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2}$$

Anziehungskraft des Mondes auf die Erde:

$$F_{M,E} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2}$$

Weiter ist  $F_{E,M}$  noch die Zentripetalkraft bei der Bewegung des Mondes um die Erde:

$$F_{E,M} = F_{z,M} = \frac{M_M \cdot v_M^2}{r_{EM}}$$

Nach dem 3. Newton-Axiom sind  $F_{E,M}$  und  $F_{M,E}$  gleich, und es kann daher gesetzt werden:

$$\frac{F_{M,E}}{r_{E,M}^2} = \frac{F_{E,M}}{r_{E,M}^2} = \frac{F_{z,M}}{r_{E,M}^2} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2} = \frac{M_M \cdot v_M^2}{r_{E,M}}$$

Nun wird die Gleichheit von  $F_{M,E}$  und  $F_{z,M}$  ausgenutzt:

$$\frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} = \frac{M_M \cdot v_M^2}{r_{E,M}}$$

Umstellen nach  $G_M$ :

$$\begin{aligned} G_M &= \frac{v_M^2 r_{E,M}}{M_E} \\ &= \left( 1,023 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \cdot \frac{3,844 \cdot 10^8 \text{ m}}{5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}} \\ &= \boxed{G_M = 6,73 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Berechnung von $M_M$

Dazu wird der Umlauf einer Mondsonde betrachtet. Da nach Abschnitt 4.2.1  $G_M$  bekannt ist, kann das 3. Kepler-Gesetz verwendet werden:

$$G_M \cdot M_M = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

$a$ : große Bahnhalbachse der Sonde

$T$ : Umlaufdauer der Sonde

$$G_M = G_E = G$$

Umstellen nach  $M_M$ :

$$M_M = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G_m \cdot T^2}$$

Beispiel: Lunar Orbiter 1 (1966)

[https://en.wikipedia.org/wiki/Lunar\\_Orbiter\\_1](https://en.wikipedia.org/wiki/Lunar_Orbiter_1)

$$a = (189,1 + 3476 + 1866,8) \text{ km} / 2 = 2766 \text{ km}$$

$$T = 3 \text{ h } 37 \text{ min} = 217 \text{ min} = 1,302 \text{e}4 \text{ s}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} M_M &= \frac{4\pi^2 \cdot (2,766 \cdot 10^6)^3 \text{ m}^3}{(1,302 \cdot 10^4)^2 \text{ s}^2 \cdot 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}} \\ &= \boxed{M_M = 7,38 \cdot 10^{22} \text{ kg}} \end{aligned}$$

## 5. Sonne und Planeten

### 5.1 Berechnung von $M_S$ und $G_S$

Das im Abschnitt 4.2 beschriebene Vorgehen zur Berechnung des Erde–Mond–Systems kann auf das System Sonne–Erde übertragen werden:

$$\frac{F_{E,S}}{r_{E,S}^2} = \frac{F_{S,E}}{r_{E,S}^2} = \frac{F_{z,E}}{r_{E,S}} = \frac{M_S \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,S}^2} = \frac{M_E \cdot G_S \cdot M_S}{r_{E,S}^2} = \frac{M_E \cdot v_E^2}{r_{E,S}}$$

Aus  $F_{E,S} = F_{z,E}$  ergibt sich:

$$M_S = \frac{v_E^2 r_{E,S}}{G_E} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg},$$

und damit dann aus  $F_{S,E} = F_{z,E}$  auch

$$G_S = \frac{v_E^2 r_{E,S}}{M_S} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}.$$

### 5.2 $G$ auf den Planeten

Statt der Erde E wird ein anderer Planet P betrachtet:

$$\frac{F_{P,S}}{r_{P,S}^2} = \frac{F_{S,P}}{r_{P,S}^2} = \frac{F_{z,P}}{r_{P,S}} = \frac{M_S \cdot G_P \cdot M_P}{r_{P,S}^2} = \frac{M_P \cdot G_S \cdot M_S}{r_{P,S}^2} = \frac{M_P \cdot v_P^2}{r_{P,S}}$$

Da die Masse der Sonne nach 6.1 nun bekannt ist, kann die Gleichheit  $F_{P,S} = F_{z,P}$  ausgenutzt werden, und es folgt:

$$G_P = \frac{v_P^2 r_{P,S}}{M_S}.$$

Beispiele:

Planet	$r_{P,S} / \text{AE}$	$v_P / \text{km/s}$	$G_P / \text{m}^3 / \text{kg s}^2$
Mars	1,52	24,13	$6,67 \cdot 10^{-11}$
Jupiter	5,203	13,07	$6,68 \cdot 10^{-11}$
Saturn	9,5826	9,69	$6,76 \cdot 10^{-11}$

### 5.3 Masse der Planeten

Wie bei der Berechnung der Mondmasse in 4.2.2 unter Verwendung einer Mondsonde kann die Masse eines Planeten unter Verwendung der Daten eines Mondes oder einer Sonde bestimmt werden. Beispiel: Jupitermond Io

$r = 421\,800 \text{ km};$ $v = 17,3 \text{ km/s}$ $G_J$ nach 6.2 bekannt	$M_J = \frac{v^2 r}{G_J} = \frac{(17,3 \cdot 10^3)^2 \text{ m}^2 / \text{s}^2 \cdot 4,218 \cdot 10^8 \text{ m}}{6,673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg s}^2} = 1,892 \cdot 10^{27} \text{ kg}$
---	---

## Anhang

### A1. $G$ und $M$ bei Kreisbewegung

Bei der Kreisbewegung eines Satelliten um einen Zentralkörper der Masse  $M$  gilt

$$GM = v_S^2 r_S .$$

Im Falle des Erde-Mond-Systems:

$$G_M M_M = v_S^2 r_S .$$

In der realen Physik wird die universelle Gravitationskonstante verwendet:  $G_M = G_E = G$ . Damit ergibt sich bei bekannten Bahndaten  $v_S$  und  $r_S$  die Masse des Mondes:

$$M_M(G_E) = \frac{v_S^2 r_S}{G_E} .$$

Die Schreibweise  $M_M(G_E)$  soll hervorheben, dass die Mondmasse unter Verwendung der Gravitationskonstanten  $G_E$  berechnet wurde.

Die Bahndaten  $v_S$  und  $r_S$  legen nur das Produkt  $G_M M_M$  fest – nicht aber die Werte von  $G_M$  und  $M_M$ . Daher wird von Dieter Grosch nun die Ansicht vertreten, dass es für diese Größen „beliebig viele Werte“ geben könne, denn mit

$$G_M = \frac{G_E}{x} \quad \text{und} \quad M_M = x \cdot M_M(G_E) \quad (*)$$

ergibt sich ebenfalls

$$\left( \frac{G_E}{x} \right) \cdot (x \cdot M_M) = G_E \cdot M_M(G_E) = v_S^2 \cdot r_S .$$

So weit ist formal alles richtig – und Dieter Grosch schließt nun weiter, dass man den wahren Wert der Gravitationskonstanten auf dem Mond nur durch eine direkte Messung auf dem Mond bestimmen könne. Das allerdings ist nicht richtig, denn seine Annahme lässt sich leicht anders überprüfen. Gravitationsgesetz und 3. Newton-Axiom liefern – wie schon mehrfach verwendet –:

$$F_{M,E} = F_{E,M}$$

$$\frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2}$$

Nach Multiplikation mit  $r_{E,M}^2$  und unter Verwendung von  $G_M$  und  $M_M$  gemäß der Grosch-Annahme (\*) wird daraus:

$$M_E \cdot \frac{G_E}{x} \cdot x \cdot M_M(G_E) = x \cdot M_M(G_E) \cdot G_E \cdot M_E .$$

Auf der linken Seite kürzt sich  $x$  heraus:

$$M_E \cdot G_E \cdot M_M(G_E) = x \cdot M_M(G_E) \cdot G_E \cdot M_E ,$$

und nach Division durch  $M_E \cdot G_E \cdot M_M(G_E)$  bleibt:

$$1 = x .$$

Also ist  $G_M = G_E$  und  $M_M = M_M(G_E)$ .



## A2. Ein „Experimentvorschlag“

In dsp verkündete Dieter Grosch am 15.09.2016, 12:46:

„ein Nachweis wäre wenn Du ein Masse auf den Mond schießt, der einen Satelliten hat und diesen beobachtest und nach dem Gravitationsgesetz untersuchst, dann muss bei deiner Behauptung sich ergeben das wen  $G_M = G_E$  sein soll:

$$m_M / (m_M + M_x) = v^2 \cdot r / ((v_x)^2 \cdot r_x)$$

wenn dies nicht aufgeht ändert sich auch  $G_M$  wie angegeben.“  
(<nrd55\$2ik\$1@dont-email.me>)

Betrachtet man das System „Mond – Satellit“, dann gilt wegen des 3. Newton-Axioms wieder die Gleichheit der wechselseitig ausgeübten Gravitationskräfte:

$$F_{M,S} = F_{S,M}.$$

Mit dem Gravitationsgesetz ergibt sich

$$m_S \cdot G_M \cdot M_M = M_M \cdot G_S \cdot m_S.$$

Da sich die Massen herausheben, folgt

$$G_M = G_S.$$

Nun soll die Masse des Mondes durch eine Zusatzmasse  $M_x$  vergrößert werden:  $M'_M = M_M + M_x$ . Für das veränderte System „(Mond + x) – Satellit“ gilt auch wieder die Gleichheit der Gravitationskräfte:

$$F_{M',S} = F_{S,M'}.$$

Das Gravitationsgesetz führt dann auf

$$m_S \cdot G'_M \cdot M'_M = M'_M \cdot G_S \cdot m_S.$$

Die Massen heben sich wieder heraus, und es folgt:

$$G'_M = G_S.$$

Das  $G_S$  andererseits mit  $G_M$  übereinstimmt, ergibt sich

$$G'_M = G_M.$$

$G_M$  verändert sich also nicht, wie zu erwarten war.

## A3. Der Massenmittelpunkt eines Teilchensystems

Ein System aus  $n$  Teilchen mit den Massen  $m_i$  besitzt einen Massenmittelpunkt, auch Schwerpunkt genannt. Er stellt das mit den Massen gewichtete Mittel der Ortskoordinaten  $\vec{r}_i$  der Teilchen dar. Für seinen Ortsvektor gilt:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Da dieser Massenmittelpunkt in einführenden Lehrwerken oft über die Betrachtung der Gewichtskräfte  $\vec{F}_i = m_i \vec{g}_i$  und deren Drehmomente definiert wird, schließt Dieter Grosch daraus, dass der Massenmittelpunkt von der Gravitationskonstanten abhängt. Das ist erkennbar nicht der

Fall: Auch bei der elementar-anschaulichen Einführung hebt sich die Fallbeschleunigung  $g$  – und damit die Gravitationskonstante  $G$  – heraus, wie obige Gleichung für den Ortsvektor des Massenmittelpunktes auch zeigt. Es gibt also keine Abhängigkeit von  $G$ .

Die Beziehung zur Berechnung des Massenmittelpunktes kann natürlich auch völlig unabhängig von einer Fallbeschleunigung und der Gravitationskonstanten hergeleitet werden. Die folgende Herleitung ist angelehnt an:

L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1, Mechanik.

\* Es wird ein abgeschlossenes Inertialsystem  $K$  betrachtet, in dem sich Teilchen der Massen  $m_i$  mit den Geschwindigkeiten  $\vec{v}_i$  bewegen. Der Impuls in diesem Teilchensystem ist

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i .$$

\* Ein zweites Inertialsystem  $K'$  bewege sich mit einer Geschwindigkeit  $\vec{V}$  relativ zum System  $K$ . In  $K'$  sind die Geschwindigkeiten der Teilchen dann

$$\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V} ,$$

und der Impuls der Teilchen ist in  $K'$

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}'_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{V} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i - \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^n m_i .$$

Für eine bestimmte Geschwindigkeit  $\vec{V}$  wird dieser Impuls Null. Diese Geschwindigkeit ist

$$\vec{V} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} . \quad (\&)$$

\* Daraus ergibt sich zunächst die Beziehung zwischen Impuls  $\vec{P}$  und Geschwindigkeit  $\vec{V}$  des Gesamtsystems:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{V} \cdot \sum_{i=1}^n m_i = \vec{V} \cdot M .$$

Diese Beziehung ist dieselbe wie die zwischen Impuls und Geschwindigkeit eines einzelnen

Teilchens, dessen Masse  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  gleich der Summe aller Teilchen des Systems ist.

\* Weiter: Da die Geschwindigkeiten die zeitlichen Ableitungen der Ortskoordinaten sind, lässt sich für (&) auch schreiben:

$$\frac{d \vec{R}}{d t} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d \vec{r}_i}{d t}}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{d}{d t} \left( \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \right) .$$

Die Geschwindigkeit des Gesamtsystems ist also gleich der Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt mit dem Ortsvektor

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

im Raum bewegt. Dies ist der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Systems. Wie eingangs schon erwähnt, stellt er das mit den Massen gewichtete Mittel der Ortskoordinaten  $\vec{r}_i$  der Teilchen dar, und ist nicht von der Gravitationskonstanten abhängig.