Die Newtonsche Gravitationskonstante G

1. Einleitung

In der Newtonschen Physik wird davon ausgegangen, dass die Gravitationskonstante *G* eine universelle Konstante ist, und keine Orts- und/oder Zeitabhängigkeit aufweist. Der bekannte „Alternativdenker" Dieter Grosch widerspricht dem – allerdings ohne dafür Nachweise vorlegen zu können. Er betrachtet *G* als Eigenschaft von Himmelskörpern. So will er z.B. der Erde ein bestimmtes *G* zuordnen, und anderen Himmelskörpern - etwa dem Mond oder der Sonne - andere *G*-Werte. Das ist vermutlich dadurch entstanden, dass er nur die Gleichung für die Kreisbewegung eines Satelliten der Masse *m* um einen Zentralkörper mit Masse *M* >> *m* betrachtet:

$$F_{gr} = F_z$$

$$G\frac{M\,m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$G\,M = v^2 r\ .$$

Dies könnte so fehlinterpretiert werden, dass G eine Eigenschaft des Himmelskörpers bzw. der Masse wäre.

2. Messung von G auf der Erde

Die Bestimmungen von *G*, die auf der Erde durchgeführt wurden, sind so ausgeführt, dass dabei nur die gravitierenden Testmassen aufeinander wirken, und die Erdanziehung sich nicht auf die Messung auswirkt. Das ist schon bei dem klassischen Versuch mit der Torsionswaage so: Der Torsionsfaden weist in Richtung der Fallbeschleunigung, und die zwischen den Testmassen wirkenden Kräfte liegen in einer Ebene senkrecht zur Erdanziehungskraft - siehe z.B. hier:

https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationswaage

Einen kurzen historischen Überblick über solche Messungen und auch über Variationen davon kann man in folgender Arbeit finden:

https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/binary/7SUBNBPTPZBPEZP7T6KN3WYK4IAZHTHD/full/1.pdf

Dort wird auch eine moderne Messmethode vorgestellt: das Fabry-Pérot-Gravimeter. Auch dabei sind die zu messenden Gravitationskräfte senkrecht zur Erdanziehungskraft.

Als erster Punkt ist also festzuhalten:

- *Das bekannte G wird natürlich auf der Erde gemessen, es ist aber keine Eigenschaft der Erde als Himmelskörper.*

Nun könnte man weiter fragen, ob *G* dann eine Eigenschaft der Massen ist. Auch das ist nicht der Fall, denn die vielen Messungen von *G* wurden auch mit vielen verschieden großen Massen ausgeführt - beim genannten Fabry-Pérot-Gravimeter werden sogar zwei Massen von 576 kg verwendet. Das Ergebnis aller solcher Messungen ist stets dasselbe *G*.

Als zweiter Punkt ist also zu vermerken:

- *Die Gravitationskonstante ist auch keine Eigenschaft einer Masse, sie hat also nicht den Charakter einer Materialkonstanten.*

Der eigentlichen Bedeutung von G kommt man näher, wenn man sich klar macht, wie G überhaupt in die Gleichungen kommt. Grundlage ist die Tatsache, dass zwei Massen m_1 und m_2 wechselseitig eine anziehende Kraft aufeinander ausüben: m_1 zieht m_2 mit einer Kraft $F_{1,2}$ an, und m_2 zieht m_1 mit einer gleich großen Kraft $F_{2,1}$ an - daher der Begriff *Wechselwirkung*. Schon Newton wusste, dass diese Wechselwirkungskraft proportional zu den Massen und umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat ist:

$$F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2} \ .$$

Da keine weiteren Einflussgrößen bekannt sind, welche die gravitative Wechselwirkung bestimmen, wird in der Newtonschen Physik nun eine Gravitationskonstante G eingeführt:

$$F = \frac{m_1 \cdot G \cdot m_2}{r^2} \ .$$

Sie ist unabhängig von den Massen, wie schon oben ausgeführt, und die hier gewählte Schreibweise bringt zum Ausdruck, was G wirklich ist:

- *G ist eine Eigenschaft der Gravitationswechselwirkung zwischen Massen.*

Nebenbei bemerkt: Wenn G auf eine geeignete Weise gemessen wurde, dann erhält man natürlich die Masse der Erde, z.B. aus

$$F_G = m g = \frac{m \cdot G M_E}{R_E^2}$$

$$M_E = \frac{F_G \cdot R_E^2}{m G} \ .$$

3. Die Gravitationskonstante auf anderen Himmelskörpern

3.1 Gravitationskonstante auf dem Mond

Es wird die Gravitationskraft zwischen Erde und Mond betrachtet. Angenommen, die G-Werte von Erde G_E und Mond G_M wären verschieden; dann zieht die Erde den Mond an mit der Kraft

$$F_{E,M} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2}$$

und der Mond zieht die Erde an mit der Kraft

$$F_{M,E} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} \ .$$

Nach dem dritten Newtonschen Axiom – dem Wechselwirkungsprinzip – sind diese Kräfte gleich groß:

$$F_{E,M} = F_{M,E} \ ,$$

$$\frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2}$$

Multiplikation mit $r_{E,M}^2$:

$$M_M \cdot G_E \cdot M_E = M_E \cdot G_M \cdot M_M$$

Division durch $M_E \cdot M_M$:

$$G_E = G_M \ .$$

Die G-Werte von Erde und Mond stimmen also überein.

3.2 Die Gravitationskonstante auf Sonne und Planeten

Betrachtet man jetzt das System Sonne – Erde, dann ergibt sich bei Annahme verschiedener Werte G_E und G_S aus dem Wechselwirkungsprinzip, dass die G-Werte tatsächlich gleich sind: $G_S = G_E$.

Da nun G_S bekannt ist, kann die Überlegung auf andere Planeten P statt der Erde übertragen werden. Daraus ergibt sich die Gleichheit der Gravitationskonstanten auf den Planeten mit der Gravitationskonstanten der Erde: $G_P = G_S = G_E$.

4. Bestimmung von Gravitationskonstante und Masse eines Himmelskörpers

Ein Himmelskörper mit der Masse M_Z und der angenommenen Gravitationskonstanten G_Z wird von einem Satelliten der Masse $m \ll M_Z$ auf einer Kreisbahn umlaufen. Die anziehende Gravitationskraft F_{gr} ist die Zentripetalkraft F_z der Bewegung des Satelliten, und aus $F_{gr} = F_z$ folgt:

$$G_Z M_Z = v^2 r \ .$$

Sind nur Geschwindigkeit und Bahnradius bekannt, kann auch nur das Produkt $G\,M$ angegeben werden. Sollen G_Z und M_Z ermittelt werden, so muss jeweils eine Größe – G_Z oder M_Z – unabhängig von der jeweils anderen Größe – M_Z oder G_Z – ermittelt werden. Nach Abschnitt 3 ist bekannt, dass die Gravitationskonstante auf Sonne und Planeten mit der Gravitationskonstanten G_E übereinstimmt, die auf der Erde gemessen wird. Zur Erweiterung sollen hier am Beispiel des Mondes noch zwei Vorgehensweisen vorgestellt werden, die die unabhängige Bestimmung von G und M ermöglichen.

4.1. Bestimmung von M_M, dann G_M

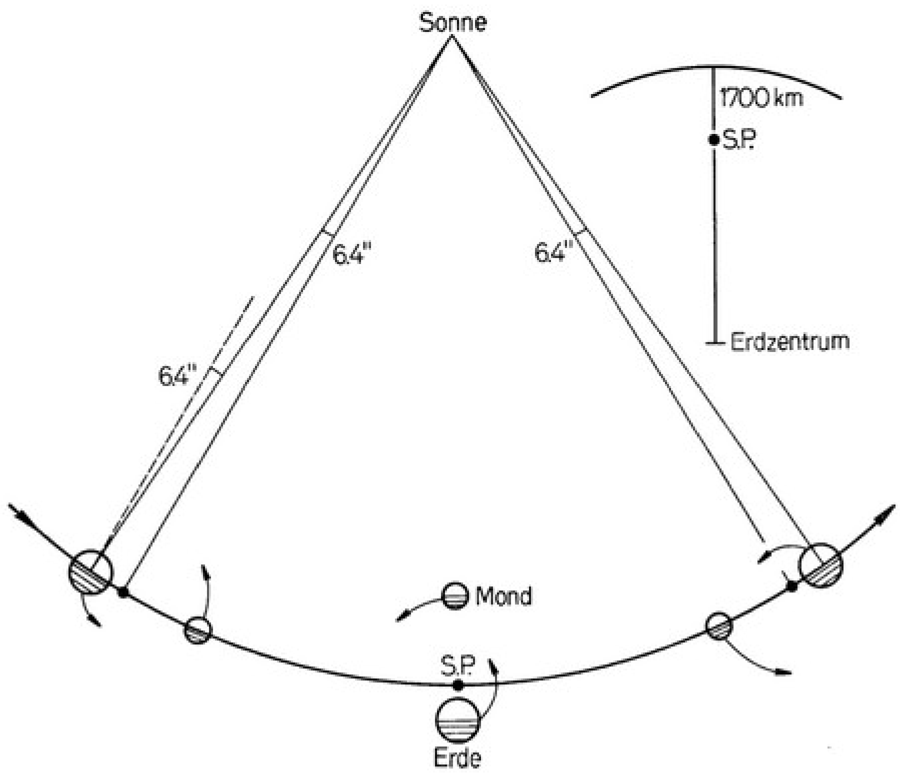
4.1.1 Die Masse des Mondes

In „F. Link: Der Mond; Springer-Verlag“ wird auf den Seiten 10 bis 12 eine interessante Möglichkeit zur Bestimmung der Mondmasse aus astronomischen Beobachtungen vorgestellt. Dies ist auch online einsehbar:

https://books.google.de/books?id=F4OiBgAAQBAJ&pg=PA10&dq=bestimmung+der+mondmasse&hl=de&sa=X&ved=0ahUKEwjWlKPx1ITPAhVHthQKHRvzD7AQ6AEISzAI#v=onepage&q=bestimmung%20der%20mondmasse&f=false

Hier eine Kurzfassung:

Mond und Erde umlaufen gemeinsam den Schwerpunkt des Systems Erde - Mond. Der Schwerpunkt des Systems bewegt sich auf einer Ellipse um die Sonne ("Erdbahn"). Der Umlauf um den Schwerpunkt des Systems führt dazu, dass sich die Erde periodisch vor oder hinter dem Schwerpunkt befindet:



(aus F. Link: Der Mond; Abbildung 7, Seite 10)

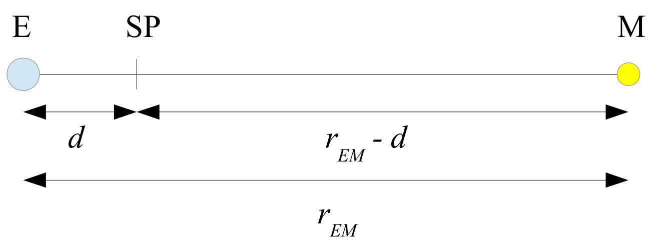
Als Folge davon wird die Lage der Sonne als periodisch verlagert wahrgenommen. Der dabei auftretende Winkel ist

$$\delta = 6{,}4 \text{ Bogensekunden} = 1{,}778\text{e-}3° = 3{,}1028\text{e-}5 \text{ rad}.$$

Die Entfernung des Schwerpunkts SP vom Erdmittelpunkt ergibt sich unter Verwendung von δ und dem Abstand Erde – Sonne $r_{E,S}$ = 1 AE zu

$$d = r_{E,S} \cdot \delta = 1{,}496 \cdot 10^{11}\,\text{m} \cdot 3{,}1028 \cdot 10^{-5} = 4{,}6418 \cdot 10^{6}\,\text{m} \,.$$

Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems liegt auf der Verbindungslinie der Massenzentren:



Es gilt der aus der Mechanik bekannte Zusammenhang für die Lage des Schwerpunktes zweier (Punkt-)Massen:

$$\frac{d}{r_{E,M}} = \frac{M_M}{M_E + M_M} \,.$$

Daraus folgt:

$$d \cdot (M_E + M_M) = M_M \cdot r_{E,M}$$

$$d \cdot M_E = M_M \cdot (r_{E,M} - d)$$

$$M_M = M_E \cdot \frac{d}{r_{E,M} - d}$$
$$= 5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{4{,}642 \cdot 10^6\,\mathrm{m}}{(3{,}844 \cdot 10^8 - 4{,}642 \cdot 10^6)\,\mathrm{m}}$$
$$\boxed{M_M = 7{,}302 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}$$

Die Mondmasse lässt sich also aus astronomischen Beobachtungen auf der Erde bestimmen, *ohne dabei G_M zu verwenden*.

4.1.2 Bestimmung von G_M

In

http://www.leifiphysik.de/mechanik/freier-fall-senkrechter-wurf/versuche/fallbeschleunigung-auf-dem-mond

wird der Sprung eines Astronauten auf dem Mond ausgewertet.

1. Aus dem Material ergibt sich eine Fallbeschleunigung von etwa $g_M = 1{,}6\frac{\mathrm{m}}{s^2}$.
2. Aus dem Gravitationsgesetz folgt:
$$g_M = \frac{G_M \cdot M_M}{R_M^2}$$
umgestellt nach G_M: $$G_M = \frac{g_M \cdot R_M^2}{M_M}\ .$$
3. Die Mondmasse ist nach 4.1.1 bekannt, der Mondradius ist ebenfalls bekannt, so dass sich ergibt:
$$G_M = \frac{1{,}6\,\mathrm{m/s^2} \cdot (1{,}738 \cdot 10^6\,\mathrm{m})^2}{7{,}302 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}}$$
$$\boxed{G_M = 6{,}62 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\,s^2}}}.$$

Wie nicht anders zu erwarten war, ist $G_M = G_E = G$.

4.2 Berechnung von G_M, dann M_M

4.2.1 Berechnung von G_M

Anziehungskraft der Erde auf den Mond:

$$F_{E,M} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2}$$

Anziehungskraft des Mondes auf die Erde:

$$F_{M,E} = \frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2}$$

Weiter ist $F_{E,M}$ noch die Zentripetalkraft bei der Bewegung des Mondes um die Erde:

$$F_{E,M} = F_{z,M} = \frac{M_M \cdot v_M^2}{r_{EM}} \ .$$

Nach dem 3. Newton-Axiom sind $F_{E,M}$ und $F_{M,E}$ gleich, und es kann daher gesetzt werden:

$$\begin{array}{ccccc} F_{M,E} & = & F_{E,M} & = & F_{z,M} \\ \dfrac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} & = & \dfrac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2} & = & \dfrac{M_M \cdot v_M^2}{r_{E,M}} \ . \end{array}$$

Nun wird die Gleichheit von $F_{M,E}$ und $F_{z,M}$ ausgenutzt:

$$\frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} = \frac{M_M \cdot v_M^2}{r_{E,M}}$$

Umstellen nach G_M:

$$\begin{aligned} G_M &= \frac{v_M^2 \, r_{E,M}}{M_E} \\ &= \left(1{,}023 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot \frac{3{,}844 \cdot 10^8 \,\mathrm{m}}{5{,}974 \cdot 10^{24} \,\mathrm{kg}} \\ & \boxed{G_M = 6{,}73 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}} \ . \end{aligned}$$

4.2.2 Berechnung von M_M

Dazu wird der Umlauf einer Mondsonde betrachtet. Da nach Abschnitt 4.2.1 G_M bekannt ist, kann das 3. Kepler-Gesetz verwendet werden:

$$G_M \cdot M_M = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

a: große Bahnhalbachse der Sonde
T: Umlaufdauer der Sonde
$G_M = G_E = G$

Umstellen nach M_M: $$M_M = \frac{4\pi^2}{G_m} \cdot \frac{a^3}{T^2}$$

Beispiel: Lunar Orbiter 1 (1966)

https://en.wikipedia.org/wiki/Lunar_Orbiter_1

a = (189,1 + 3476 + 1866,8) km / 2 = 2766 km

T = 3 h 37 min = 217 min = 1,302e4 s

einsetzen:

$$M_M = \frac{4\pi^2 \cdot \left(2{,}766 \cdot 10^6\right)^3 \mathrm{m}^3}{\left(1{,}302 \cdot 10^4\right)^2 \mathrm{s}^2 \cdot 6{,}673 \cdot 10^{-11} \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}}$$

$$\boxed{M_M = 7{,}38 \cdot 10^{22} \,\mathrm{kg}} \ .$$

5. Sonne und Planeten

5.1 Berechnung von M_S und G_S

Das im Abschnitt 4.2 beschriebene Vorgehen zur Berechnung des Erde–Mond–Systems kann auf das System Sonne–Erde übertragen werden:

$$\begin{array}{ccccc} F_{E,S} & = & F_{S,E} & = & F_{z,E} \\ \dfrac{M_S \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,S}^2} & = & \dfrac{M_E \cdot G_S \cdot M_S}{r_{E,S}^2} & = & \dfrac{M_E \cdot v_E^2}{r_{E,S}} \end{array} .$$

Aus $F_{E,S} = F_{z,E}$ ergibt sich:

$$M_S = \frac{v_E^2 r_{E,S}}{G_E} = 1{,}99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}\ ,$$

und damit dann aus $F_{S,E} = F_{z,E}$ auch

$$G_S = \frac{v_E^2 r_{E,S}}{M_S} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}\ .$$

5.2 *G* auf den Planeten

Statt der Erde E wird ein anderer Planet P betrachtet:

$$\begin{array}{ccccc} F_{P,S} & = & F_{S,P} & = & F_{z,P} \\ \dfrac{M_S \cdot G_P \cdot M_P}{r_{P,S}^2} & = & \dfrac{M_P \cdot G_S \cdot M_S}{r_{P,S}^2} & = & \dfrac{M_P \cdot v_P^2}{r_{P,S}} \end{array} .$$

Da die Masse der Sonne nach 5.1 nun bekannt ist, kann die Gleichheit $F_{P,S} = F_{z,P}$ ausgenutzt werden, und es folgt:

$$G_P = \frac{v_P^2 r_{P,S}}{M_S}\ .$$

Beispiele:

Planet	$r_{P,S}$ / AE	v_P / km/s	G_P / m³/ kg s²
Mars	1,52	24,13	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$
Jupiter	5,203	13,07	$6{,}68 \cdot 10^{-11}$
Saturn	9,5826	9,69	$6{,}76 \cdot 10^{-11}$

5.3 Masse der Planeten

Wie bei der Berechnung der Mondmasse in 4.2.2 unter Verwendung einer Mondsonde kann die Masse eines Planeten unter Verwendung der Daten eines Mondes oder einer Sonde bestimmt werden. Beispiel: Jupitermond Io

$r = 421\ 800$ km ; $v = 17{,}3$ km/s G_J nach 6.2 bekannt	$M_J = \dfrac{v^2 r}{G_J} = \dfrac{(17{,}3 \cdot 10^3)^2\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \cdot 4{,}218 \cdot 10^8\,\mathrm{m}}{6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{kg\,s}^2} = 1{,}892 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$

Anhang

A1. *G* und *M* bei Kreisbewegung

Bei der Kreisbewegung eines Satelliten um einen Zentralkörper der Masse M gilt

$$G\,M = v_S^2\, r_S\ .$$

Im Falle des Erde-Mond-Systems:

$$G_M\, M_M = v_S^2\, r_S\ .$$

In der realen Physik wird die universelle Gravitationskonstante verwendet: $G_M = G_E = G$. Damit ergibt sich bei bekannten Bahndaten v_S und r_S die Masse des Mondes:

$$M_M(G_E) = \frac{v_S^2 r_S}{G_E}\ .$$

Die Schreibweise $M_M(G_E)$ soll hervorheben, dass die Mondmasse unter Verwendung der Gravitationskonstanten G_E berechnet wurde.

Die Bahndaten v_S und r_S legen nur das Produkt $G_M M_M$ fest – nicht aber die Werte von G_M und M_M. Daher wird von Dieter Grosch nun die Ansicht vertreten, dass es für diese Größen „beliebig viele Werte“ geben könne, denn mit

$$G_M = \frac{G_E}{x} \quad \text{und} \quad M_M = x \cdot M_M(G_E) \qquad (*)$$

ergibt sich ebenfalls

$$\left(\frac{G_E}{x}\right) \cdot (x \cdot M_M) = G_E \cdot M_M(G_E) = v_S^2 \cdot r_S\ .$$

So weit ist formal alles richtig – und Dieter Grosch schließt nun weiter, dass man den wahren Wert der Gravitationskonstanten auf dem Mond nur durch eine direkte Messung auf dem Mond bestimmen könne. Das allerdings ist nicht richtig, denn seine Annahme lässt sich leicht anders überprüfen. Gravitationsgesetz und 3. Newton-Axiom liefern – wie schon mehrfach verwendet – :

$$F_{M,E} = F_{E,M}$$

$$\frac{M_E \cdot G_M \cdot M_M}{r_{E,M}^2} = \frac{M_M \cdot G_E \cdot M_E}{r_{E,M}^2}$$

Nach Multiplikation mit $r_{E,M}^2$ und unter Verwendung von G_M und M_M gemäß der Grosch-Annahme (*) wird daraus:

$$M_E \cdot \frac{G_E}{x} \cdot x \cdot M_M(G_E) = x \cdot M_M(G_E) \cdot G_E \cdot M_E\ .$$

Auf der linken Seite kürzt sich x heraus:

$$M_E \cdot G_E \cdot M_M(G_E) = x \cdot M_M(G_E) \cdot G_E \cdot M_E\ ,$$

und nach Division durch $M_E \cdot G_E \cdot M_M(G_E)$ bleibt:

$$1 = x\ .$$

Also ist $G_M = G_E$ und $M_M = M_M(G_E)$.

A2. Ein „Experimentvorschlag“

In dsp verkündete Dieter Grosch am 15.09.2016, 12:46:

> „ein Nachweis wäre wenn Du ein Masse auf den Mond schießt, der einen Satelliten hat und diesen beobachtest und nach dem Gravitationsgesetz untersuchst, dann muss bei deiner Behauptung sich ergeben das wen G_M = G_E sein soll:
>
> m_M/(m_M + M_x) = v²*r /((v_x)²*r_x)
>
> wenn dies nicht aufgeht ändert sich auch G_M wie angegeben.“ (<nrdu55$2ik$1@dont-email.me>)

Betrachtet man das System “Mond – Satellit“ , dann gilt wegen des 3. Newton-Axioms wieder die Gleichheit der wechselseitig ausgeübten Gravitationskräfte:

$$F_{M,S}=F_{S,M} \ .$$

Mit dem Gravitationsgesetz ergibt sich

$$m_S \cdot G_M \cdot M_M = M_M \cdot G_S \cdot m_S \ .$$

Da sich die Massen herausheben, folgt

$$G_M = G_S \ .$$

Nun soll die Masse des Mondes durch eine Zusatzmasse M_x vergrößert werden: $M'_M = M_M + M_x$. Für das veränderte System “(Mond + x) – Satellit“ gilt auch wieder die Gleichheit der Gravitationskräfte:

$$F_{M',S}=F_{S,M'} \ .$$

Das Gravitationsgesetz führt dann auf

$$m_S \cdot G'_M \cdot M'_M = M'_M \cdot G_S \cdot m_S \ .$$

Die Massen heben sich wieder heraus, und es folgt:

$$G'_M = G_S \ .$$

Das G_S andererseits mit G_M übereinstimmt, ergibt sich

$$G'_M = G_M \ .$$

G_M verändert sich also nicht, wie zu erwarten war.

A3. Der Massenmittelpunkt eines Teilchensystems

Ein System aus n Teilchen mit den Massen m_i besitzt einen Massenmittelpunkt, auch Schwerpunkt genannt. Er stellt das mit den Massen gewichtete Mittel der Ortskoordinaten $\vec{r}_i$ der Teilchen dar. Für seinen Ortsvektor gilt:

$$\vec{R}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{1}{M}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M=\sum_{i=1}^{n} m_i \ .$$

Da dieser Massenmittelpunkt in einführenden Lehrwerken oft über die Betrachtung der Gewichtskräfte $\vec{F}_i = m_i \vec{g}_i$ und deren Drehmomente definiert wird, schließt Dieter Grosch daraus, dass der Massenmittelpunkt von der Gravitationskonstanten abhängt. Das ist erkennbar nicht der

Fall: Auch bei der elementar-anschaulichen Einführung hebt sich die Fallbeschleunigung g – und damit die Gravitationskonstante G – heraus, wie obige Gleichung für den Ortsvektor des Massenmittelpunktes auch zeigt. Es gibt also keine Abhängigkeit von G.

Die Beziehung zur Berechnung des Massenmittelpunktes kann natürlich auch völlig unabhängig von einer Fallbeschleunigung und der Gravitationskonstanten hergeleitet werden. Die folgende Herleitung ist angelehnt an:

L.D. Landau, E.M. Lifschitz: Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 1, Mechanik.

* Es wird ein abgeschlossenes Inertialsystem K betrachtet, in dem sich Teilchen der Massen m_i mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_i$ bewegen. Der Impuls in diesem Teilchensystem ist

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \; .$$

* Ein zweites Inertialsystem K' bewege sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{V}$ relativ zum System K. In K' sind die Geschwindigkeiten der Teilchen dann

$$\vec{v}\,'_i=\vec{v}_i-\vec{V} \; ,$$

und der Impuls der Teilchen ist in K'

$$\vec{P}\,'=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}\,'_i=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i-\vec{V}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i \; .$$

Für eine bestimmte Geschwindigkeit $\vec{V}$ wird dieser Impuls Null. Diese Geschwindigkeit ist

$$\vec{V}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \; . \quad (\&)$$

* Daraus ergibt sich zunächst die Beziehung zwischen Impuls $\vec{P}$ und Geschwindigkeit $\vec{V}$ des Gesamtsystems:

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i=\vec{V}\cdot\sum_{i=1}^{n} m_i=\vec{V}\cdot M \; .$$

Diese Beziehung ist dieselbe wie die zwischen Impuls und Geschwindigkeit eines einzelnen Teilchens, dessen Masse $M=\sum_{i=1}^{n} m_i$ gleich der Summe aller Teilchen des Systems ist.

* Weiter: Da die Geschwindigkeiten die zeitlichen Ableitungen der Ortskoordinaten sind, lässt sich für (&) auch schreiben:

$$\frac{d\vec{R}}{dt}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right) .$$

Die Geschwindigkeit des Gesamtsystems ist also gleich der Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt mit dem Ortsvektor

$$\vec{R}=\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

im Raum bewegt. Dies ist der Massenmittelpunkt (Schwerpunkt) des Systems. Wie eingangs schon erwähnt, stellt er das mit den Massen gewichtete Mittel der Ortskoordinaten $\vec{r}_i$ der Teilchen dar, und ist nicht von der Gravitationskonstanten abhängig.

A.4 Einige „alternative“ Berechnungen im Erde-Mond-System

Um G_M und M_M zu bestimmen, können die folgenden Daten vorausgesetzt werden.

Mond:

Abstand Erde – Mond: $r_{EM}=3{,}844\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$

Für einen Mond-Satelliten, der den Mond auf einer Ellipse mit großer Bahnhalbachse a und Umlaufdauer T umläuft, gilt nach dem 3. Kepler-Gesetz:

$$G_M M_M=\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot a^3 \ .$$

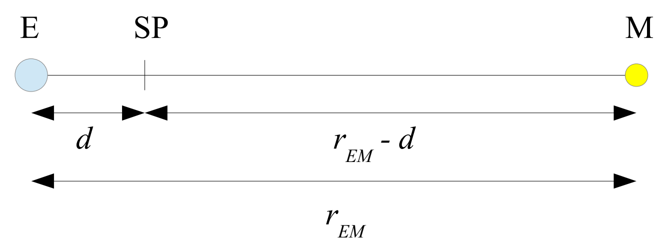
Dieses Produkt ist aus astronomischen Beobachtungen bekannt:

$$G_M M_M=4{,}905\cdot 10^{12}\,\frac{\mathrm{m}^3}{s^2} \ .$$

Erde:

$$M_E=5{,}974\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \quad ; \quad G_E=6{,}674\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \quad ; \quad G_E M_E=3{,}987\cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$$

Schwerpunkt im Erde-Mond-System:

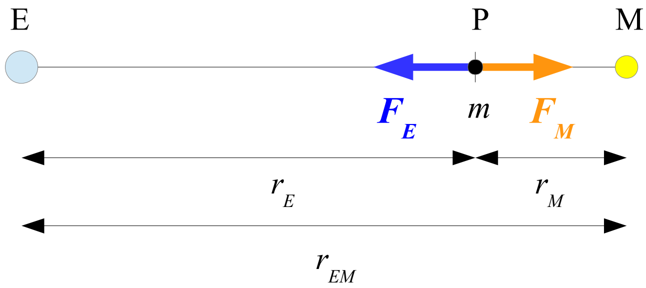


Wie in Abschnitt 4.1.1 gezeigt wurde, ist

$$d=4{,}642\cdot 10^{6}\,\mathrm{m} \ .$$

Abarischer Punkt im Erde-Mond-System:

An diesem Punkt sind die Anziehungskräfte, die von Erde und Mond auf einen Körper der Masse m ausgeübt werden, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.



Die Lage dieses Punktes auf der Verbindungslinie von Erde und Mond ergibt sich wie folgt:

$$F_E(P) = F_M(P)$$
$$\frac{G_E M_E \cdot m}{r_E^2} = \frac{G_M M_M \cdot m}{r_M^2}$$

Nach Kürzen von m und einsetzen von $r_E = r_{EM} - r_E$ ergibt sich:

$$G_E M_E \cdot r_M^2 = G_M M_M \cdot (r_{EM} - r_M)^2 \;.$$

Auflösen nach r_M:

$$r_M = \frac{r_{EM}}{1 + \sqrt{\dfrac{G_E M_E}{G_M M_M}}} = 0{,}1 \cdot r_{EM} = 0{,}348 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

Für r_E erhält man damit:

$$r_E = r_{EM} - r_M = 0{,}9 \cdot r_{EM} = 3{,}460 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \;.$$

1. Berechnung unter Verwendung des Schwerpunktabstandes d

Der erste Ansatz von Dieter Grosch zur Berechnung von G_M und M_M lautete:

$$F_E = \frac{G_E M_E \cdot M_M}{(r_{EM} - d)^2} \qquad (1)$$

$$F_M = \frac{G_M M_M \cdot M_E}{d^2} \qquad (2)$$

$$F_E = F_M \qquad (3)$$

Das ist erkennbar unsinnig, denn:

(1) F_E ist demnach die Anziehungskraft, welche die Erde auf den Mond ausübt, wenn dieser sich im Abstand $r_{EM} - d$ von der Erde befindet.

(2) F_M ist demnach die Anziehungskraft, welche der Mond auf die Erde ausübt, wenn diese sich im Abstand d vom Mond befindet.

(3) Die Gleichsetzung von F_E und F_M ist – abgesehen von der Unsinnigkeit dieser Kräfte – ebenfalls falsch, da der Schwerpunkt nicht gleich dem abarischen Punkt im Erde-Mond-System ist.

Ausführung dieses Ansatzes:

$$F_E = F_M$$
$$\frac{G_E}{(r_{EM}-d)^2} = \frac{G_M}{d^2}$$
$$G_M = G_E \cdot \frac{d^2}{(r_{EM}-d)^2}$$

Ergebnis: $$G_M = 1{,}494 \cdot 10^{-4} \cdot G_E = 1{,}0 \cdot 10^{-14} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

Mit dem bekannten Wert des Produktes $G_M M_M$ folgt dann für die Masse:

$$M_M = \frac{(G_M M_M)}{G_M} = 4{,}919 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg} = 82{,}33 \cdot M_E\ .$$

Die erhaltenen Werte haben mit den realen Werten von M_M und G_M nicht das Geringste zu tun.

Wären die berechneten Werte zutreffend, so hätte dies folgende Auswirkungen:

- Der Mond (Radius R_M = 1,738 10^6 m) hätte die Dichte $\rho_M = 2{,}238 \cdot 10^7 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 2{,}288 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$,
  also die Dichte eines Sterns.
  Zum Vergleich: Die mittlere Dichte der Sonne beträgt 1,408 g/cm^3.
- Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems läge in der Entfernung
  $$d' = 0{,}988 \cdot r_{EM}$$
  vom Erdmittelpunkt. Die Entfernung vom Mondmittelpunkt wäre
  $$r_{EM} - d' = 0{,}012 \cdot r_{EM} = 4{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{m}\ ,$$
  also läge der Schwerpunkt noch innerhalb des Mondes.
- Da Zweikörper-Systeme sich um den Schwerpunkt bewegen, würde somit die Erde sich um den Mond bewegen.
- Wie die Abbildung in Abschnitt 4.1.1 zeigt, würde als Folge davon beim Umlauf des Erde-Mond-Systems um die Sonne auf der Erde eine sehr große periodische Verlagerung der Sonnenposition festgestellt, die nicht mit der real beobachteten Verlagerung übereinstimmt:
  $$\delta' = \frac{d'}{r_{ES}} = \frac{0{,}988 \cdot r_{EM}}{r_{ES}} = 2{,}538 \cdot 19^{-3}\,\mathrm{rad} = 0{,}145\,° = 523{,}6\,\mathrm{Bogensekunden}\ .$$

Wenn nicht mit den unsinnigen Kräften aus (1) und (2), sondern mit den realen Wechselwirkungs-kräften von Erde und Mond gerechnet wird, so ergibt sich in der Realität ganz einfach aus der Verwendung des dritten Newtonschen Axioms:

$$F_E = F_M$$
$$\frac{G_E M_E \cdot M_M}{r_{EM}^2} = \frac{G_M M_M \cdot M_E}{r_{EM}^2}$$
$$G_E = G_M\ .$$

2. Berechnung unter Verwendung des abarischen Punktes P

Hier setzte Dieter Grosch wie folgt an:

$$F_E(P) = \frac{G_E M_E \cdot M_M}{r_E^2} \quad (1)$$

$$F_M(P) = \frac{G_M M_M \cdot M_E}{r_M^2} \quad (2)$$

$$F_E(P) = F_M(P) \quad (3)$$

Auch dies ist unphysikalischer Unfug, denn:

(1) $F_E(P)$ ist demnach die Anziehungskraft, welche die Erde auf den Mond ausübt, wenn dieser sich im Abstand r_E von der Erde befindet – also im abarischen Punkt steht.

(2) $F_M(P)$ ist demnach die Anziehungskraft, welche der Mond auf die Erde ausübt, wenn diese sich im Abstand r_M vom Mond befindet, also im abarischen Punkt steht.

Ausführung dieses Ansatzes:

$$F_E(P) = F_M(P)$$

$$\frac{G_E M_E \cdot M_M}{r_E^2} = \frac{G_M M_M \cdot M_E}{r_M^2}$$

$$G_M = G_E \cdot \frac{r_M^2}{r_E^2} = \frac{1}{81} \cdot G_E = 8{,}24 \cdot 10^{-13} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\, s}^2}$$

Entsprechend dem Vorgehen bei 1. ergibt sich die Mondmasse:

$$M_M = \frac{(G_M M_M)}{G_M} = 5{,}953 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} = 0{,}996 \cdot M_E \, .$$

Auch hier kann man sich die Auswirkungen klar machen, wenn die berechneten Werte zutreffend wären:

- Der Mond hätte nun die Dichte $\rho_M = 2{,}706 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 270{,}3 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, also wieder die Dichte eines Sterns.

- Der Schwerpunkt des Erde-Mond-Systems läge in der Entfernung
$$d' = 0{,}499 \cdot r_{EM}$$
vom Erdmittelpunkt. Die Entfernung vom Mondmittelpunkt wäre
$$r_{EM} - d' = 0{,}501 \cdot r_{EM} \; .$$
Der Schwerpunkt läge also fast genau zwischen Erde und Mond.

- Damit würden Erde und Mond Kreisbahnen vom Radius $r \approx 0{,}5 \cdot r_{EM}$ um den Schwerpunkt beschreiben - was sie aber nachweislich nicht tun.

- Auch in diesem Fall würde beim Umlauf des Erde-Mond-Systems um die Sonne auf der Erde eine periodische Verlagerung der Sonnenposition festgestellt, die nicht mit der real beobachteten Verlagerung übereinstimmt:

$$\delta' = \frac{d'}{r_{ES}} = \frac{0{,}499 \cdot r_{EM}}{r_{ES}} = 1{,}282 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} = 7{,}346 \cdot 10^{-2}\,{}^\circ = 264{,}5\,\mathrm{Bogensekunden} \; .$$

Bei richtiger Verwendung des abarischen Punktes müssten die Kräfte auf eine Probemasse *m* gleichgesetzt werden:

$$\frac{G_E M_E \cdot m}{r_E^2} = \frac{G_M M_M \cdot m}{r_M^2}$$
$$G_M M_M = G_E M_E \cdot \frac{r_M^2}{r_E^2} \quad .$$

Die Größen auf der rechten Seite sind bekannt, und es ergibt sich:

$$G_M M_M = G_E M_E \cdot \frac{0{,}1^2}{0{,}9^2} = 4{,}922 \cdot 10^{12} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2} \; .$$

Dies stimmt mit dem bekannten Wert des Produktes $G_M M_M$ überein.

Wird nun z.B. die nach Abschnitt 4.1.1 bestimmte Masse des Mondes verwendet, liefert der richtige Ansatz bei Verwendung des abarischen Punktes auch die richtige Gravitationskonstante:

$$G_M = \frac{4{,}922 \cdot 10^{12} \, \dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}}{7{,}302 \cdot 10^{22} \, \mathrm{kg}} = 6{,}74 \cdot 10^{-11} \, \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} = G_E \; .$$