

Erdsatelliten

1. Newtons Erklärung der Bewegung der Planeten, dargestellt von Feynman

In seinem Hauptwerk „Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“, erklärt Newton im ersten Buch, Abschnitt 2: „Von der Bestimmung der Zentripetalkräfte“ die Bewegung von Körpern unter der Wirkung einer anziehenden Zentralkraft.

Originaltext:

<https://www.wilbourhall.org/pdfs/newton/NewtonPrincipia.pdf>

dort Seite 38 ff.

Deutsche Übersetzung:

https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Principien_der_Naturlehre

Die folgende Darstellung von Feynman ist entnommen aus

David L. Goodstein, Judith R. Goodstein:

„Feynmans verschollene Vorlesung. Die Bewegung der Planeten um die Sonne.“ (Piper. 1998).

Die Überlegungen gelten natürlich ebenso für die Bewegung eines Satelliten um die Erde.

Feynmans verschollene Vorlesung

Die Skizze in Feynmans Vorlesungsnotizen stammt geradewegs aus Newtons *Principia*, wie ein Vergleich sofort zeigt:

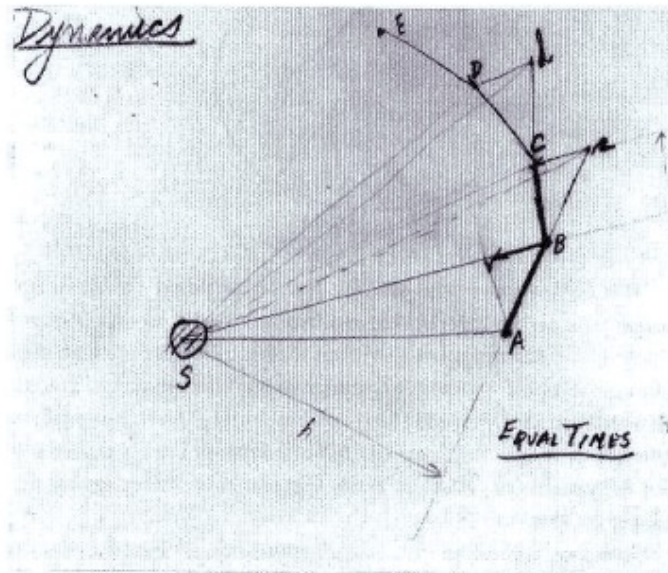


Abb. 60 Feynmans Zeichnung.

In Newtons Zeichnung stellt *S* das »unbewegliche Kraftzentrum« dar, das wir der Einfachheit halber (und ohne großen Fehler) mit dem Ort der Sonne identifizieren. *A, B, C, D, E* und *F* sind die Positionen, die ein Planet nach gleichen Zeitabständen beim Umlauf um die Sonne einnimmt. Die Bewegung des Planeten ist das Ergebnis eines Wettstreits zwischen der Tendenz des Planeten, sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden zu bewegen, wie

Feynmans Beweis des Ellipsensatzes

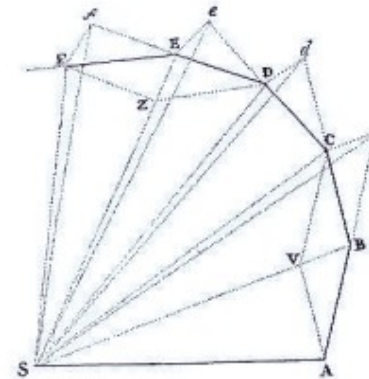


Abb. 61 Newtons Zeichnung.

er es täte, wenn keine Kräfte auf ihn wirkten (Trägheitsgesetz), und der Bewegung aufgrund der auf den Planeten wirkenden Kraft – der zur Sonne hin gerichteten Schwerkraft. Das Ergebnis dieses Wettstreits ist eine gekrümmte Bahn, die Newton für die Zwecke der elementaren geometrischen Darstellung durch eine Reihe von Strecken ersetzt, die der Trägheitsbewegung entsprechen und die unterbrochen werden von plötzlichen Richtungsänderungen aufgrund stoßartiger (momentaner) Wirkungen der Sonnenkraft. Die Zeichnung sieht am Anfang also so aus:



Abb. 62

Feynmans verschollene Vorlesung

In einem bestimmten Zeitintervall bewegt sich der Planet von A nach B , wenn keine Kraft auf ihn wirkt. Im nächsten gleich langen Zeitintervall legt er, wenn keine Kraft wirkt, auf einer geradlinigen Bahn die gleich lange Strecke Bc zurück:

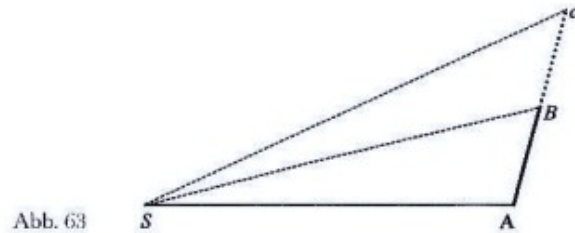


Abb. 63

Die Kraft der Sonne (die natürlich eigentlich stetig wirkt) wird durch einen Stoß dargestellt, den sie am Punkt B ausübt; dieser Kraftstoß führt dazu, daß eine Komponente BV der Bewegung zur Sonne hin gerichtet ist:

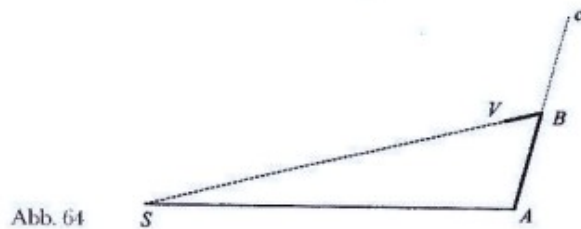


Abb. 64

Die Bewegung, die der Planet ohne die Kraft ausführen würde, also Bc , und die von der Kraft herrührende Bewegung BV bilden ein Parallelogramm, dessen Diagonale die »tatsächliche« Bewegung darstellt:

Feynmans Beweis des Ellipsensatzes

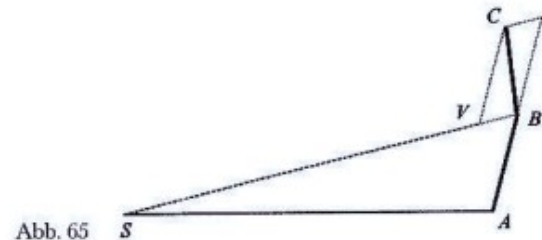


Abb. 65

Der Planet läuft also »tatsächlich« auf der Bahn ABC . Man bemerke, daß cC nicht zur Sonne hin gerichtet ist. Es ist parallel zu BV , und das weist zur Sonne hin. Übrigens liegen alle diese Punkte in einer Ebene, denn durch drei beliebige Punkte ist immer eine Ebene definiert. Die Geraden, die S , A und B verbinden, liegen ebenfalls in dieser Ebene. Die Strecke BV liegt in derselben Ebene, weil sie auf der Geraden BS liegt. Der Abschnitt Bc liegt in dieser Ebene, weil er die Verlängerung von AB ist. Die Strecke BC liegt in der Ebene, weil sie die Diagonale des von BV und Bc aufgespannten Diagramms ist. Jetzt wird dasselbe Verfahren an jedem Punkt wiederholt, so daß der nächste Schritt so aussieht:

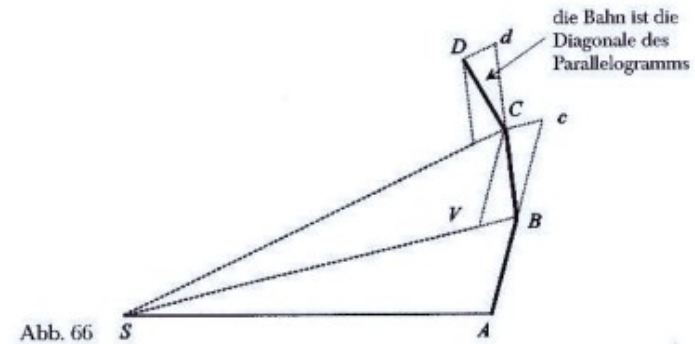


Abb. 66

die Bahn ist die Diagonale des Parallelogramms

Feynmans verschollene Vorlesung

Und so weiter. Am Ende wendet Newton dieselbe Analyse auf immer kürzere Zeitintervalle an, und dann nähert sich die Kurve *ABCD...* beliebig gut einer glatten Bahn, auf die sowohl die Trägheit als auch die Schwerkraft der Sonne stetig wirken. Die Bahn liegt immer in einer Ebene.

[...]

Feynmans verschollene Vorlesung

Jetzt lohnt es sich, zurückzuschauen und zu sehen, wie wir an diesen Punkt gelangt sind. Was genau mußten wir dazu über die Dynamik – also über Kräfte und die von ihnen bewirkten Bewegungen – wissen?

Die Antwort lautet: Wir haben Newtons erstes Gesetz (das Trägheitsgesetz) benutzt, Newtons zweites Gesetz (jede Veränderung der Bewegung hat die Richtung der darauf wirkenden Kraft) und die Vorstellung, daß die auf den Planeten wirkende Schwerkraft zur Sonne hin gerichtet ist. Nichts sonst. Wir haben beispielsweise nicht benutzt, daß die Schwerkraft umgekehrt proportional zum Abstandsquadrat ist. Dieser Aspekt der Schwerkraft hat also nichts mit Keplers zweitem Gesetz zu tun. Jede andere Kraft würde zu demselben Ergebnis führen, solange die Kraft zur Sonne hin gerichtet ist. Wie wir jetzt wissen, bedeutet Keplers Beobachtung, wonach Planeten in gleichen Zeiten gleiche Flächen überstreichen, daß die auf den Planeten wirkende Schwerkraft zur Sonne hin gerichtet ist.

Vielleicht fragen Sie, wo wir Newtons erstes und zweites Gesetz verwendet haben. Wir haben das erste Gesetz verwendet, als wir sagten, daß der Planet sich von A nach B nach c bewegen würde, wenn keine Kraft auf ihn wirkte, und das zweite, als wir sagten, daß die Veränderung in der Bewegung, BV , die von der Schwerkraft der Sonne herrührt, zur Sonne hin gerichtet ist. Wir haben übrigens auch Newtons erstes Korrolar zu seinen Gesetzen benutzt – wonach die Gesamtbewegung, die durch beide Einflüsse in dem Zeitintervall erzeugt wird, durch die Diagonale des Parallelogramms der Bewegungen gegeben ist, wenn sie getrennt erfolgt wären.

Feynmans Beweis des Ellipsensatzes

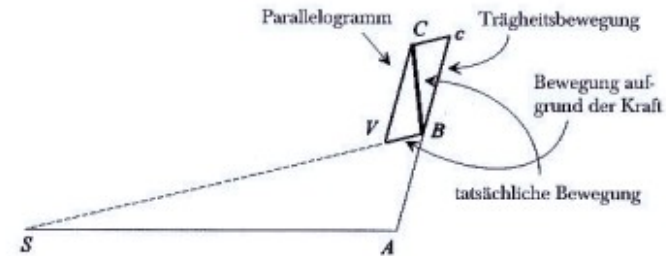


Abb. 78

An diesem Punkt der Vorlesung sagt Feynman: »Der Beweis, den Sie eben gesehen haben, ist eine genaue Kopie des Beweises, den Newton in den *Principia Mathematica* führt.«

[...]

2. Schrittweise Konstruktion von Satellitenbahnen

Die Erde ruhe im Mittelpunkt eines kartesischen Koordinatensystems, die Satellitenbahn liege in der xy-Ebene. Das von Feynman beschriebene Vorgehen lässt sich in ein einfaches Berechnungsverfahren übertragen, mit dem eine Satellitenbahn schrittweise konstruiert werden kann:

1. zu einem Zeitpunkt t_0 seien der Ort $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix}$ des Satelliten bekannt (Anfangsbedingungen)
2. aus der Zentripetalkraft wird die Beschleunigung berechnet: $\vec{a}_0 = \frac{1}{m} \vec{F}_z$, $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} a_{x0} \\ a_{y0} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_{zx} \\ F_{zy} \end{pmatrix}$, m : Satellitenmasse
3. mit dem Zeitintervall Δt wird ein Zeitschritt ausgeführt und zunächst die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = t_0 + \Delta t$ berechnet:
 $\vec{v}(t_0 + \Delta t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 \cdot \Delta t$
4. mit dieser Geschwindigkeit wird die Satellitenposition zum Zeitpunkt $t = t_0 + \Delta t$ bestimmt: $\vec{r}(t_0 + \Delta t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t_0 + \Delta t) \cdot \Delta t$
5. die erhaltenen Werte $\vec{v}(t_0 + \Delta t)$ und $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ werden nun als Startwerte für den nächsten Zeitschritt verwendet, und die beschriebenen Rechenschritte werden wiederholt, um Geschwindigkeit und Position des Satelliten nach einem weiteren Zeitintervall Δt zu berechnen.

Diese Rechenschritte werden solange ausgeführt, bis die vollständige Bahn konstruiert ist.

Anmerkung: Ist die Zentripetalkraft durch die Newtonsche Gravitationskraft gegeben, dann ist in Punkt 2

$$\vec{F}_z = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3},$$

$$\vec{a} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = -GM \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.$$

3. Geostationärer Satellit

Umlaufdauer: $T = 24$ h

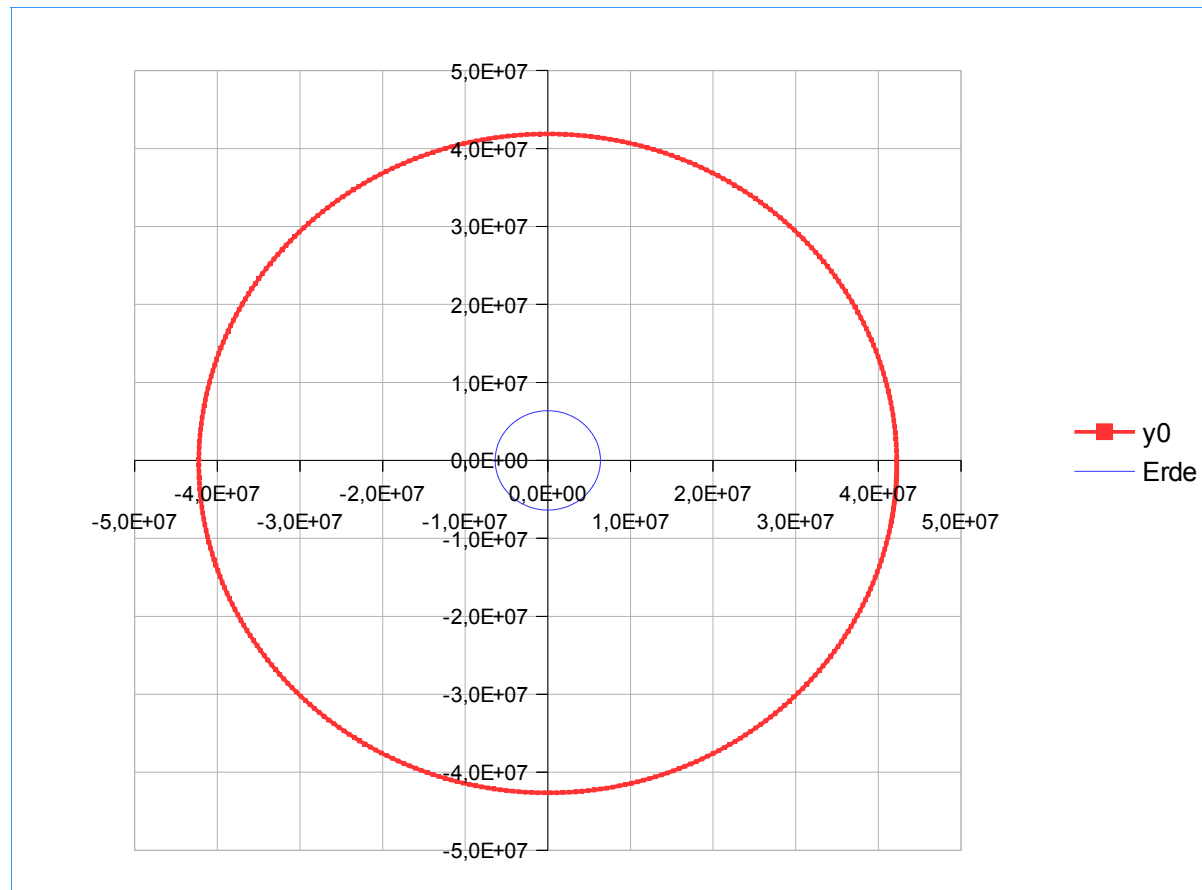
Bahnradius: $r = 4,2245e7$ m

Bahngeschwindigkeit: $v = 3,0721e3$ m/s

Anfangsposition: $x_0 = r = 4,2245e7$ m $y_0 = 0$ m

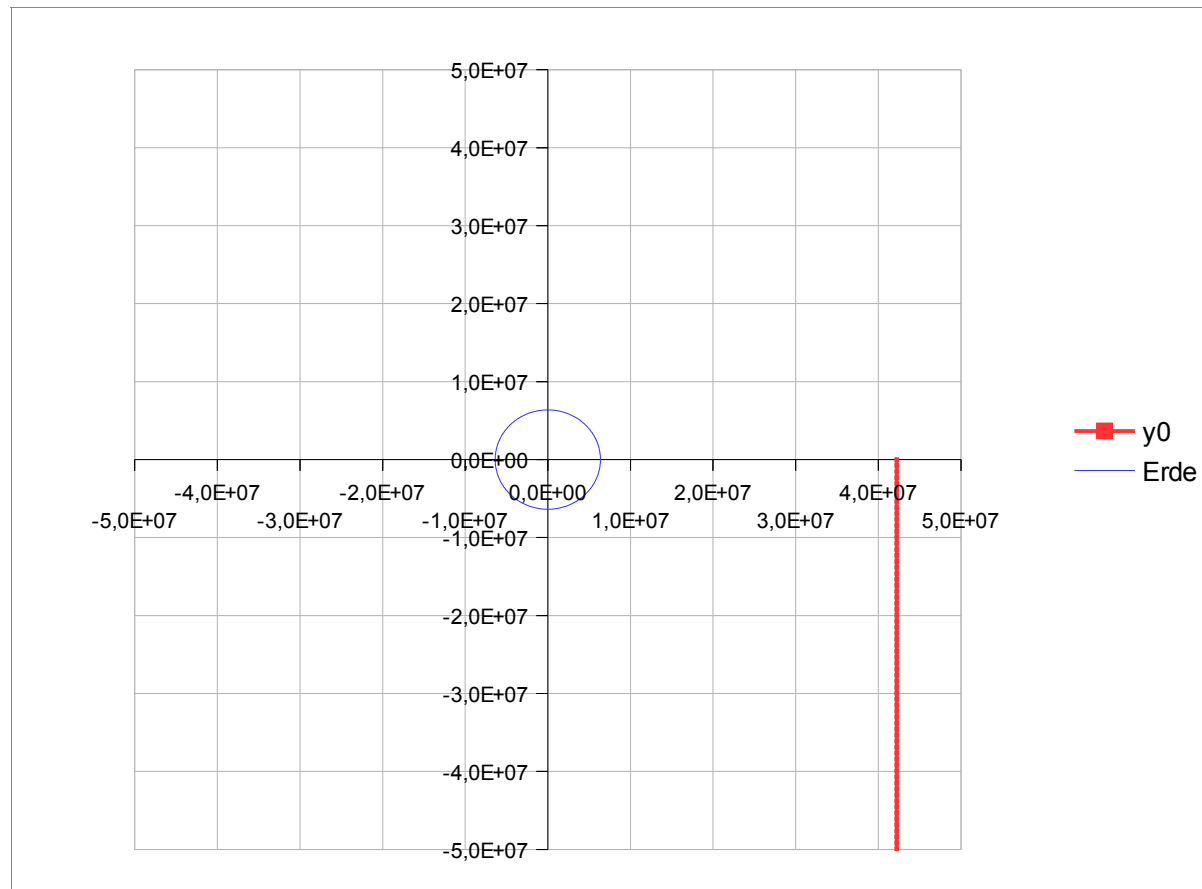
Anfangsgeschwindigkeit: $v_{x0} = 0$ m/s $v_{y0} = -v = -3,0721e3$ m/s

a) Zentripetalkraft = Newtonsche Gravitationskraft



b) Bahn bei zusätzlicher „Antigravitation“

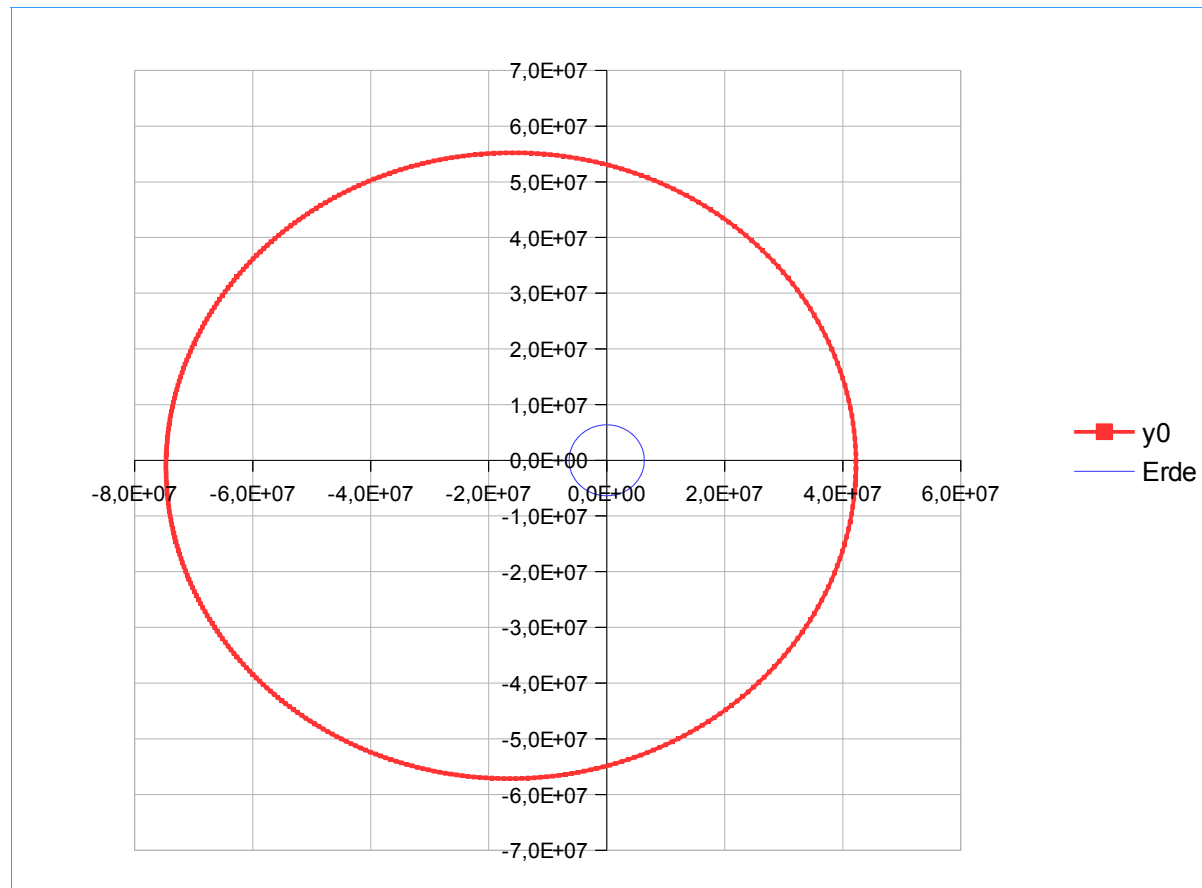
Wenn die anziehende Gravitationskraft in jedem Raumpunkt kompensiert werden soll, resultiert eine kräftefreie Bewegung:



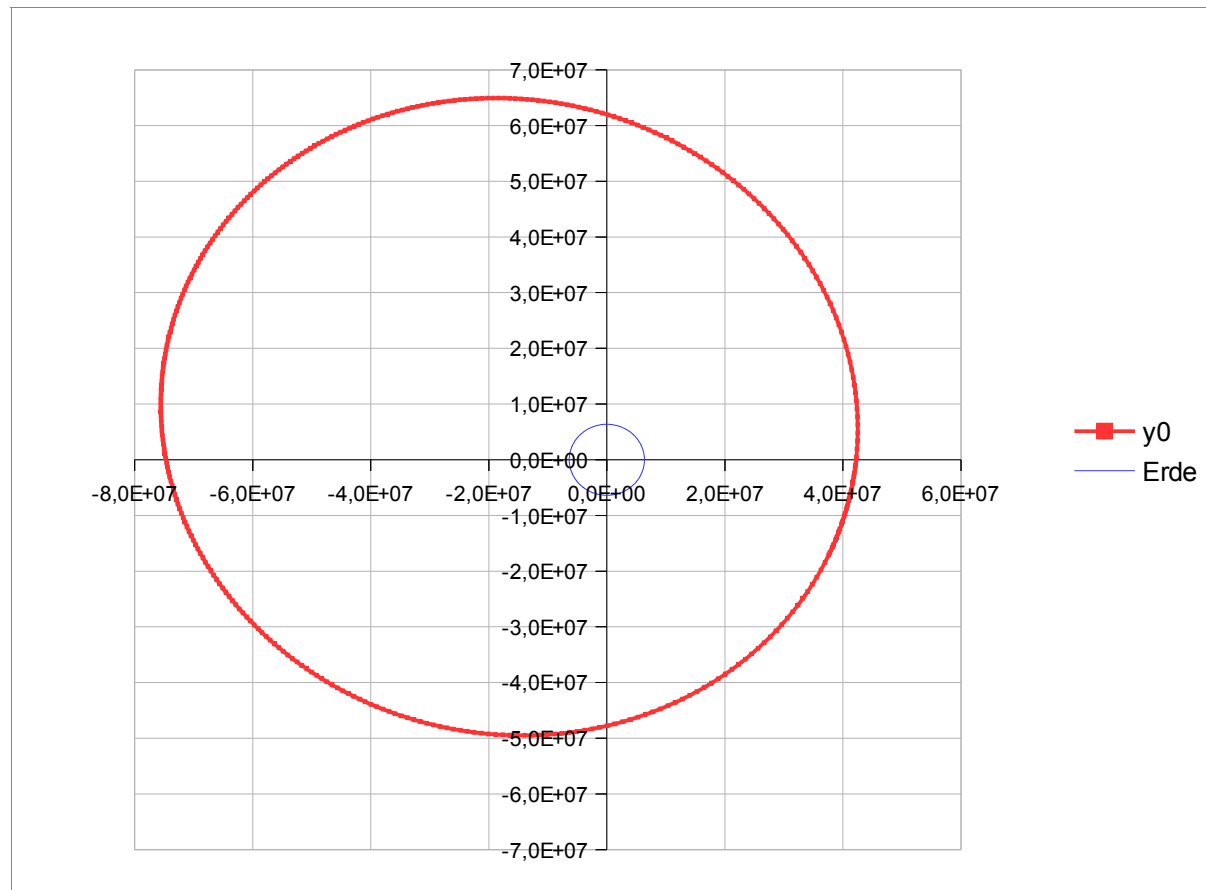
4. Bahn bei geänderter Anfangsgeschwindigkeit

Es soll nun der Einfluss der Anfangsgeschwindigkeit des Satelliten illustriert werden. Wird nicht die für die Kreisbahn nötige Geschwindigkeit gewählt, so ergeben sich elliptische Bahnen.

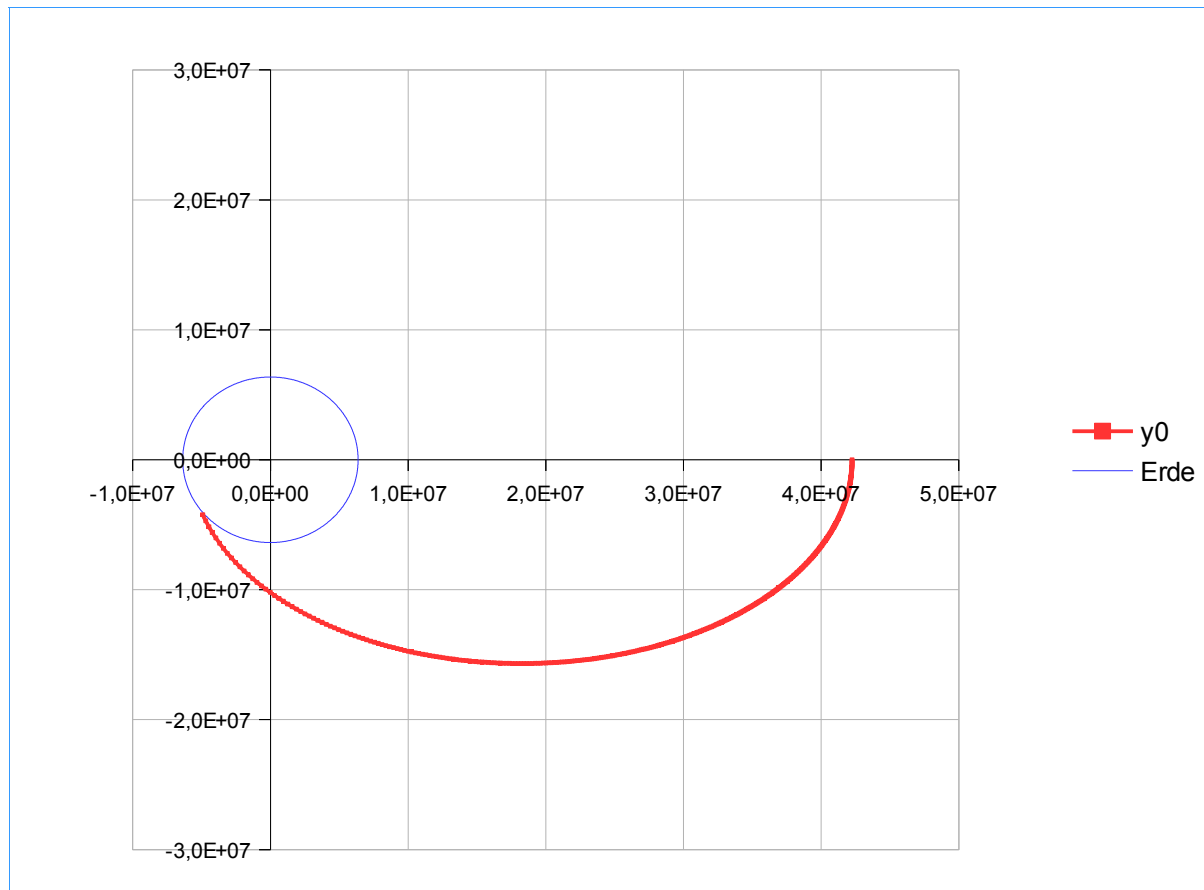
a) $v_{x0} = 0 \text{ m/s}$ $v_{y0} = -3,4721\text{e}3 \text{ m/s}$



b) $v_{x0} = -400 \text{ m/s}$ $v_{y0} = -v = -3,4721 \text{e}3 \text{ m/s}$



c) $v_{x0} = 0 \text{ m/s}$ $v_{y0} = -1,510\text{e}3 \text{ m/s}$



5. Umlaufbahn eines „Highly-Elliptical-Orbit-Satelliten“

Als Beispiel wird der Satellit IBEX (Explorer 91) betrachtet – siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Interstellar_Boundary_Explorer.

Umlaufdauer: $T = 9,1$ d; Perigäum: $4,7016 \times 10^7$ m, Apogäum: $3,0796 \times 10^8$ m, $v_{x0} = 0$ m/s, $v_{y0} = -590$ m/s

