

Doppelspaltversuch mit Elektronen

(letzte Bearbeitung: 20.12.2013)

Die Technik ist heute weit genug entwickelt, so dass das Doppelspalt-Gedankenexperiment von Feynman (siehe: The Feynman Lectures on Physics, vol III) real ausgeführt werden konnte. Im März 2013 wurde im New Journal of Physics, Volume 15 folgende Arbeit veröffentlicht:

<http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/3/033018/article> (1)

Zusätzlich werden noch weitere Materialien dazu angeboten:

<http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/3/033018/media/njp458349suppdata.pdf> (2)

Filme:

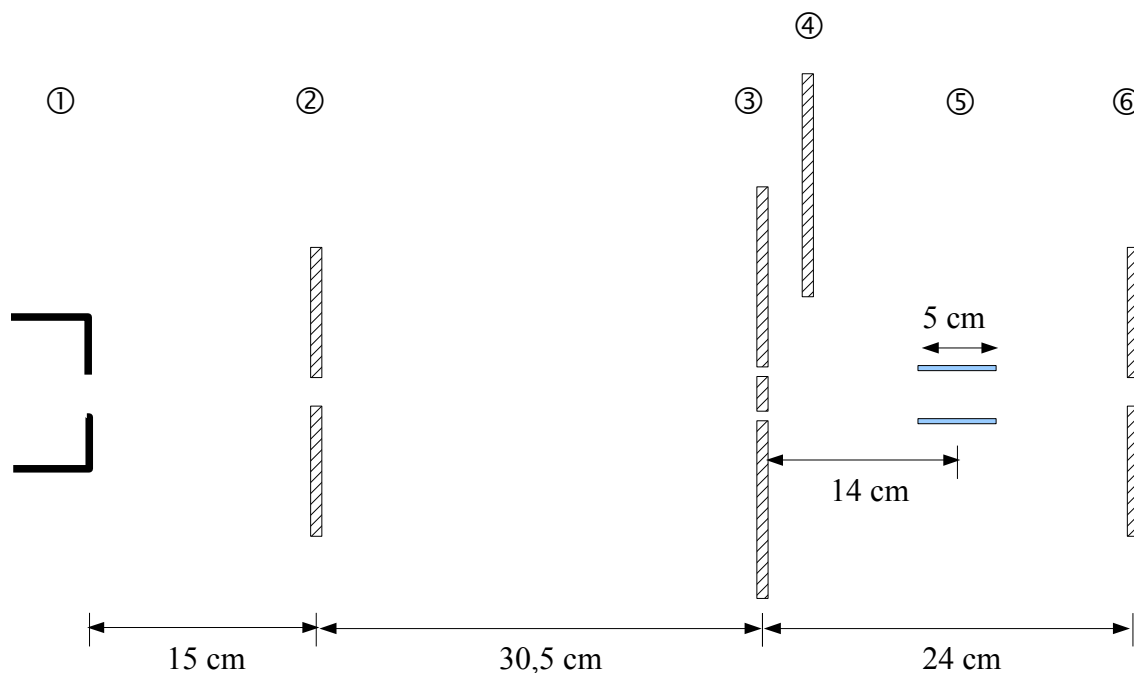
<http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/3/033018/media> (3)

Einige "Alternativdenker" sind trotz der erhaltenen Ergebnisse, welche die Aussagen der Quantentheorie bestätigen, der Meinung, dass der Doppelspaltversuch mit Elektronen in klassischer Weise durch elektromagnetische Wellen erklärt werden könnte. Dazu folgende Anmerkungen.

1. Experimenteller Aufbau

1.1 Schematische Darstellung

Alle Angaben sind den Arbeiten (1) und (2) entnommen. (Spaltbreiten nicht maßstäblich)



- ① Elektronenkanone
(nicht dargestellt: elektrostatische Linsen)
- ② Kollimationsspalt; Breite: 2 μm
- ③ Doppelspalt auf rechteckigem Träger
mit den Maßen 4,5 μm X 1,55 μm

- ④ Maske (verschiebbar) auf rechteckigem Träger mit den Maßen $20 \mu\text{m} \times 4,5 \mu\text{m}$;
Abstand vom Doppelspalt: $d_M = 240 \mu\text{m}$
- ⑤ Plattenkondensator zum Erzeugen eines elektrischen Querfelds:
quadratische Platten der Seitenlänge 5 cm ; Plattenabstand: 2 cm
- ⑥ Detektionsspalt; Breite: $5 \mu\text{m}$
(nicht dargestellt: Quadrupollinse, MCP)

Kollimationsspalt, Doppelspalt und Maske wurden aus 100 nm dicken Membranen aus Siliziumnitrid (Si_3N_4) angefertigt und mit einem 2 nm dicken Goldüberzug versehen.

1.2 Geschwindigkeit der Elektronen

Die Elektronen erhalten in der Elektronenkanone die kinetische Energie $E_{kin} = 600 \text{ eV}$. Bei relativistischer Rechnung ist

$$E_{kin} = (\gamma - 1) \cdot m c^2$$

Daraus ergibt sich

$$\gamma = \frac{E_{kin}}{m c^2} + 1 = 1,00117 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

und damit

$$\frac{v}{c} = 4,842 \cdot 10^{-2} ; \quad v = 1,452 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Aus der Energie der Elektronen ergibt sich ihre de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$. Da bei der niedrigen Geschwindigkeit nicht-relativistisch gerechnet werden darf, kann $E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$ verwendet werden, und es folgt:

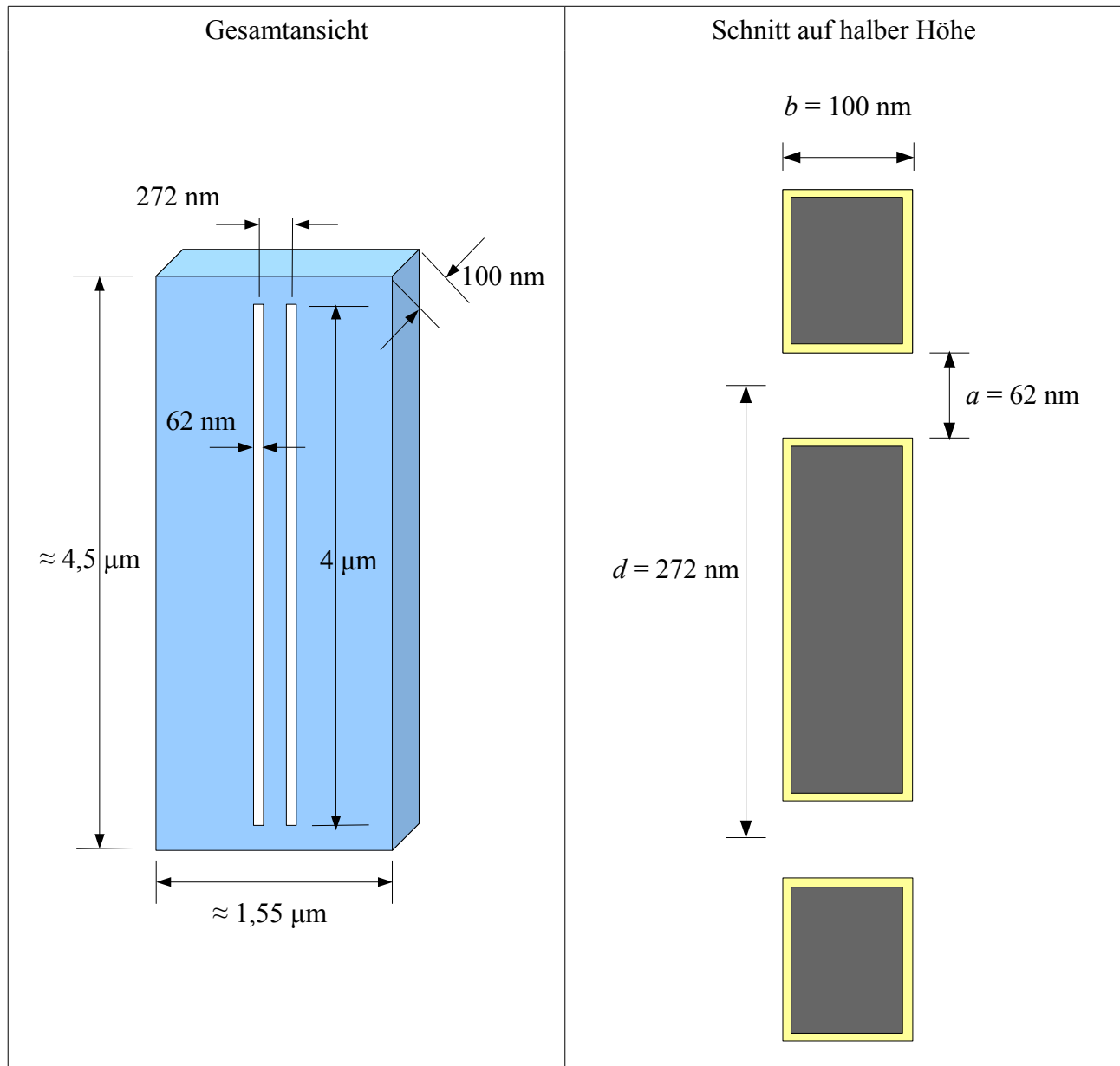
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m E_{kin}}} = 50 \text{ pm}$$

1.3 Untersuchung des Interferenzmusters

Die Untersuchung des Interferenzmusters erfolgte auf zwei Weisen:

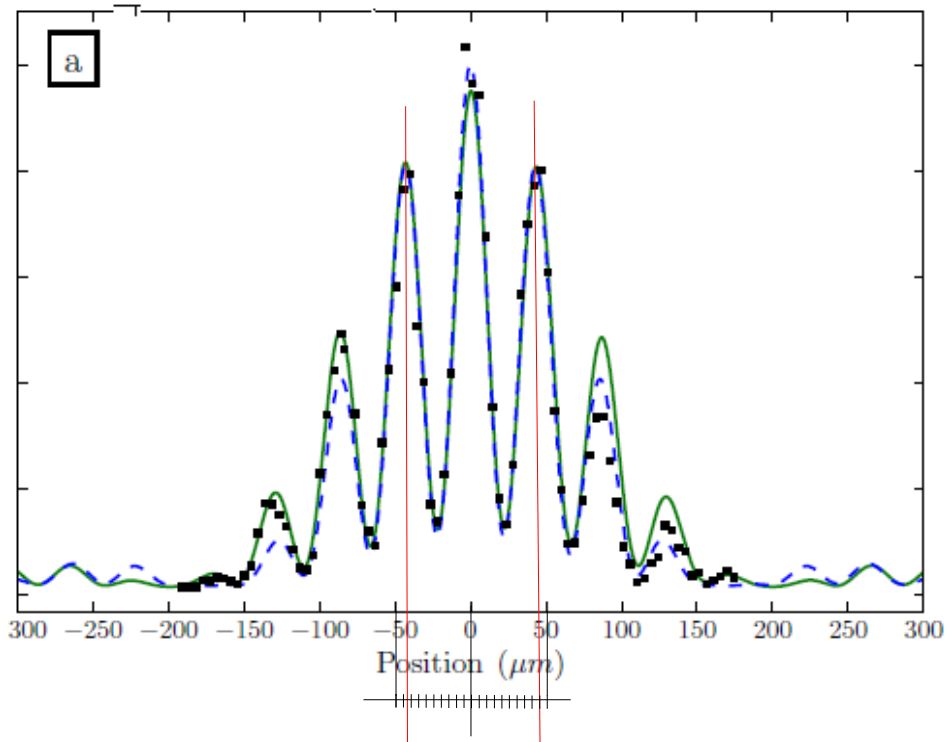
- a) Ohne elektrisches Querfeld wurde der Detektionsspalt über das Interferenzmuster geführt, um es so abzutasten.
- b) Mit eingeschaltetem elektrischen Querfeld wurde das Interferenzmuster durch Verändern der Feldstärke über den feststehenden Detektionsspalt geführt.

Beide Untersuchungsmethoden ergaben dasselbe Ergebnis (wobei Methode b eine feinere Auflösung erlaubte).

2. Genauere Beschreibung des Doppelspalts:

3. Ergebnis des Doppelspaltversuchs mit Elektronen

1. Es zeigt sich das erwartete Interferenzmuster, das sich im Laufe der Zeit aus Einzellokalisationen von Elektronen aufbaut (siehe z.B. Figur 2 in Arbeit (2)):



2. Die zeitliche Entstehung wird durch Figur 3 in Arbeit (1) und durch die in (3) angebotenen Filme dokumentiert.
3. Durch Abdecken jeweils eines Spaltes konnte nachgewiesen werden, dass sich dann das erwartete Beugungsmuster eines Einzelspaltes ergibt (siehe Figur 2 in Arbeit (1)).

Zur weiteren Auswertung wird hier die Lage der ersten Maxima abgelesen:

- erstes Maximum links: 43 μm
- erstes Maximum rechts: 45 μm
- Mittelwert: 44 μm

Aus der Theorie (siehe Abschnitt 4.1) folgt die Intensitätsverteilung in der Detektionsebene:

$$I(\alpha) = 4 A^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin(\alpha)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin(\alpha)\right)^2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha)\right)$$

Interferenzmaxima ergeben sich für $\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha)\right) = 1$, also

$$\frac{\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha) = n \cdot \pi$$

$$\sin(\alpha) = n \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Der Darstellung des Aufbaus in 1 ist zu entnehmen, dass das Interferenzmuster in der Entfernung $D = 24 \text{ cm}$ vom Doppelspalt aufgenommen wird. Seine seitliche Ausdehnung liegt zwischen $x = -300 \mu\text{m} \dots +300 \mu\text{m}$. Das bedeutet, der Winkel α ist sehr klein und es kann genähert werden:

$$\sin(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{x}{D}$$

Somit ergibt sich $\frac{x}{D} = n \cdot \frac{\lambda}{d}$, und damit $\lambda = \frac{x \cdot d}{n \cdot D}$. Für das erste Maximum ($n = 1$) und den Spaltabstand $d = 272 \text{ nm}$ erhält man

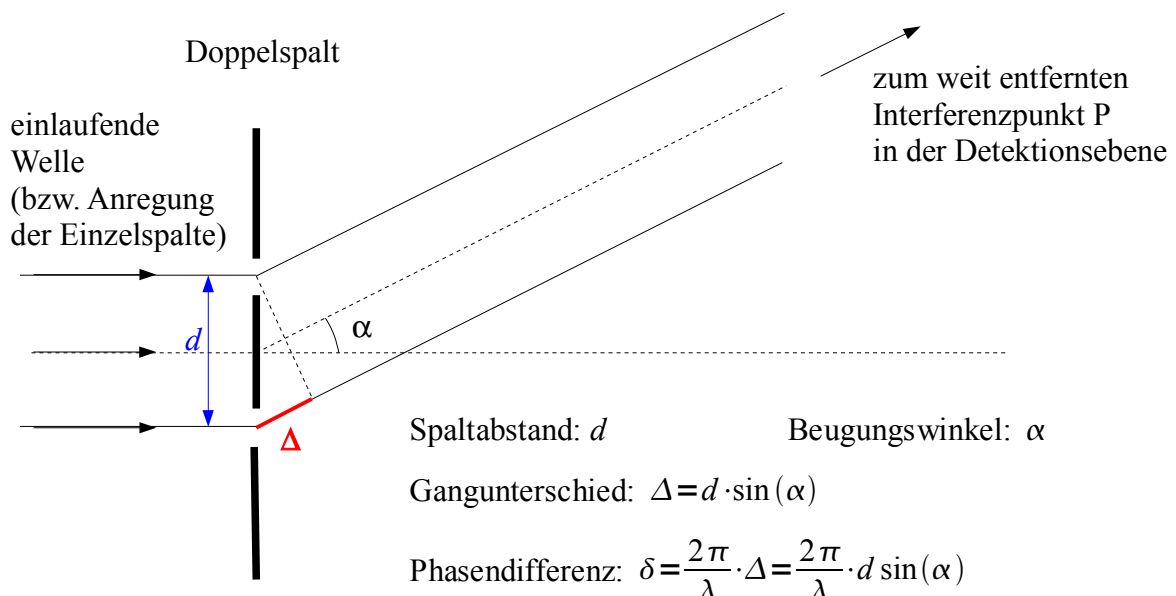
$$\lambda = \frac{44 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 272 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{0,24 \text{ m}} = 4,99 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 49,9 \text{ pm}$$

Dies stimmt mit der de Broglie-Wellenlänge der Elektronen überein.

4. Kann der Doppelspaltversuch mit Elektronen auch durch elektromagnetische Wellen erklärt werden?

4.1 Kurze Darstellung der Doppelspaltinterferenz mit Wellen

Wenn von den beiden Spalten zwei Wellen ausgehen, dann interferieren sie mit einem vom Beugungswinkel bestimmten Phasenunterschied in der weit entfernten Detektionsebene:



Im Folgenden werden die Berechnungen der Einfachheit halber mit reellen harmonischen Wellen durchgeführt. Die einzelnen Rechenschritte können aber auch genau so auf die komplexen Wellenfunktionen von Quantenobjekten (hier: das Elektron) angewendet werden (siehe Anhang). Die erhaltenen Intensitätsverteilungen ergeben sich dann auch für die Wellenfunktionen, nur haben

diese eine andere Bedeutung als die Intensität reeller klassischer Wellen: Sie beschreiben die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronenlokalisationen in der Detektionsebene.

1. Für zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz und gleichen Amplituden

$$f_1(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$f_2(x, t) = A \cdot \sin(\omega t - kx + \delta)$$

ist die Resultierende im Punkt P:

$$f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$$

$$= A \cdot [\sin(\omega t - kx) + \sin(\omega t - kx + \delta)]$$

Mit der Beziehung

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

kann umgeformt werden:

$$f(x, t) = 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t - kx + \frac{\delta}{2}\right)$$

Die Intensität ist proportional zum Amplitudenquadrat:

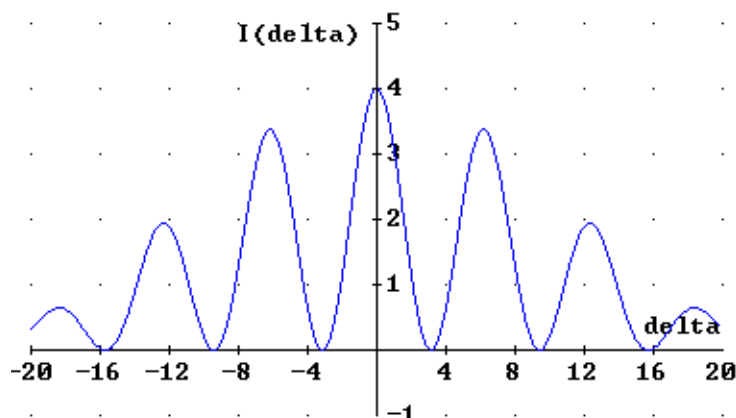
$$I(\alpha) = 4 A^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 4 A^2 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha)\right)$$

Wegen der endlichen Breite der Einzelspalte ist die Amplitude noch mit der Beugungsverteilung für den Einzelspalt moduliert (die sich aus der Integration über die Spaltbreite a ergibt).

Die Intensitätsverteilung in der Detektionsebene lautet dann vollständig:

$$I(\alpha) = 4 A^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d}\right)}{\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d}\right)^2} \cdot \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 4 A^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin(\alpha)\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin(\alpha)\right)^2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha)\right)$$

Im vorliegenden Doppelspaltversuch mit Elektronen ist der Spaltabstand $d = 272$ nm, die Spaltbreite $a = 62$ nm und die Wellenlänge $\lambda = 50$ pm. Mit diesen Parametern ergibt sich folgende Intensitätsverteilung:



Umrechnung in Ortskoordinaten:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \cdot \frac{x}{D}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\lambda D}{2\pi d} \cdot \delta$$

(D : Abstand der Detektionsebene vom Doppelspalt; $D = 24$ cm)

$\delta = 20$ entspricht also einer Ortsposition in der Detektionsebene von $x = 140$ μm .

(Anmerkung: Dieser Verlauf entspricht idealen Bedingungen. Zum unmittelbaren Vergleich mit der experimentell erhaltenen Intensitätsverteilung ist noch der Interferenzkontrast ("visibility") zu berücksichtigen.)

2. Für zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz aber mit verschiedenen Amplituden

$$f_1(x, t) = A_1 \cdot \sin(\omega t - kx)$$

$$f_2(x, t) = A_2 \cdot \sin(\omega t - kx + \delta)$$

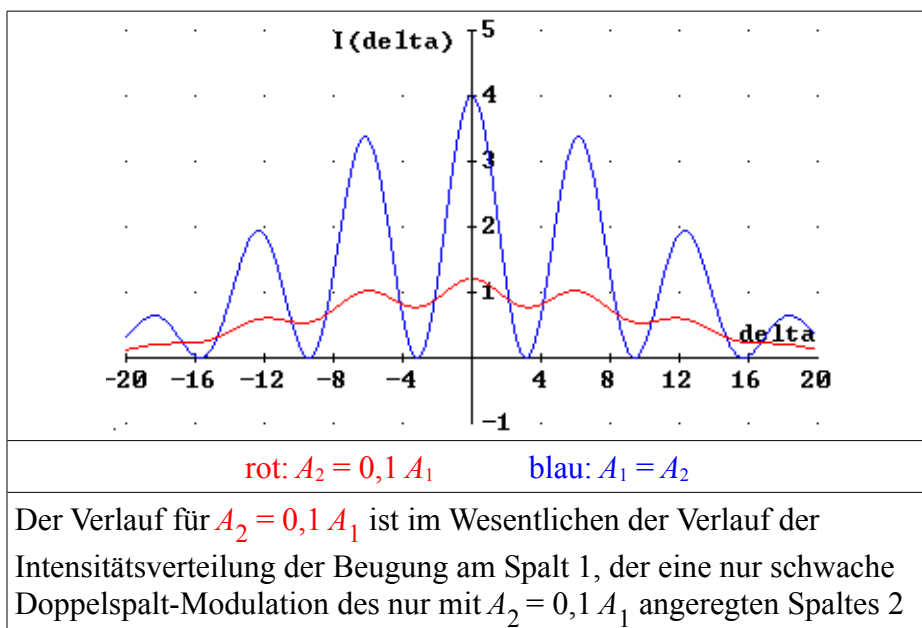
ergibt sich die Intensitätsverteilung

$$I(\alpha) = A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 A_2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right)$$

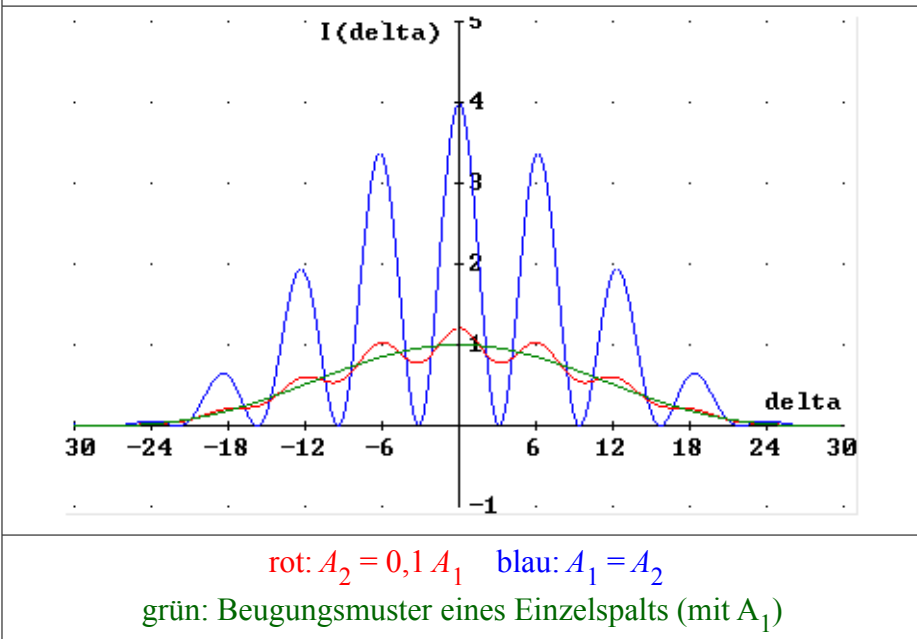
(Herleitung siehe Anhang A1.1). Unter Berücksichtigung der Breite der Einzelspalte ergibt sich:

$$I(\alpha) = \frac{\sin^2\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d}\right)}{\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d}\right)^2} \cdot \left(A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 A_2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right) \right)$$

Dies Interferenzmuster ist deutlich vom Interferenzmuster, das sich bei gleichen Amplituden ergibt, zu unterscheiden:



aufgeprägt ist. Zur Verdeutlichung ist im folgenden Bild noch das Beugungsmuster des Einzelspalts eingetragen.



(Auch hier ist der ideale Verlauf noch durch Berücksichtigung der "visibility" zu verfeinern.)

4.2 Zum Nachweis elektromagnetischer Wellen im Doppelspaltexperiment mit Elektronen

1. Das Interferenzmuster kann im elektrischen Querfeld transversal zur Ausbreitungsrichtung der Elektronen abgelenkt werden. Dies zeigt, dass es durch die Elektronen gebildet wird und nicht durch elektromagnetische Wellen, denn letztere werden in elektrischen Feldern nicht in dieser Weise abgelenkt.

2. Das Interferenzmuster baut sich im Laufe der Zeit aus einzelnen Elektronenlokalisationen auf. Bei Wellen müsste sich das Interferenzmuster sofort in seiner vollständigen Form ergeben, wenn auch zunächst nur sehr schwach in der Intensität.

3. Dem experimentell bestimmten Interferenzmuster ist zu entnehmen, dass es durch eine eindeutige Wellenlänge $\lambda = 50 \text{ pm}$ zu beschreiben ist (siehe die Auswertung in Abschnitt 3). Dies stimmt überein mit der de Broglie-Wellenlänge der Elektronen, die eine kinetische Energie 600 eV aufweisen. Eine elektromagnetische Welle müsste dann Strahlungsquanten der Energie

$$E = \frac{hc}{\lambda} = 24,8 \text{ keV} \text{ aufweisen - diese können im vorliegenden Experiment nicht entstehen.}$$

4.3 Zur Erzeugung elektromagnetischer Wellen im Doppelspaltexperiment mit Elektronen

1. Das Elektron bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf den Doppelspalt zu. Da es nicht beschleunigt ist, strahlt es also auch keine elektromagnetischen Wellen ab, die dann am Doppelspalt zu Interferenzerscheinungen führen könnten.

2. Die Annahme, dass ein durch einen Spalt hindurchtretendes Elektron eine "Schwingung" als Ausgangspunkt einer elektromagnetischen Welle erzeugt, ist falsch. Die "Schwingung" ist lediglich das Coulomb-Feld des Elektrons, das dieses mit sich führt. Dadurch wird keine elektromagnetische

Welle erzeugt (vgl. dazu auch Punkt 7).

3. Die Annahme, dass das Elektron bei Annäherung den Spalt zum "Strahlen" anregt, ist ebenfalls auszuschließen. Wenn dabei eine detektierbare elektromagnetische Welle entstehen sollte, dann müsste sie entsprechende Energie aufweisen - und die könnte nur vom Elektron geliefert werden. Die Ablenkung der Elektronen im Querfeld zeigt aber deutlich, dass die Elektronen sich dort so verhalten, wie es ihrer kinetischen Energie von 600 eV entspricht.

4. Die Annahme, dass nur ein nicht mehr messbarer kleiner Energiebetrag für die Bildung einer elektromagnetischen Welle "abgezweigt" wird, ist auch sinnlos: Die hypothetische Welle wäre dann so energiearm, dass sie gegenüber den Elektronen nichts zum Interferenzmuster beitragen könnte.

5. Die Annahme, dass der zeitliche Verlauf der elektrischen Feldstärke einer Fourier-Transformation unterzogen werden kann, um "interferierende Wellen" zu erhalten, führt nicht auf die im Experiment beobachtete Wellenlänge $\lambda = 50 \text{ pm}$, wie bereits eine einfache Abschätzung zeigt:

Die klassische Durchflugzeit T_F des Elektrons durch einen Spalt ergibt sich aus der Spaltbreite

$b = 100 \text{ nm}$ und der Elektronengeschwindigkeit $v = 1,452 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$:

$$T_F = \frac{b}{v} = 6,88 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$

Eine typische Frequenz wäre dann $f \approx \frac{1}{T_F} \approx 1,45 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}$, und die zugehörige Wellenlänge wäre

$\lambda = \frac{c}{f} \approx 2,07 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Das ist sehr groß gegen $\lambda = 50 \text{ pm}$.

6. Die Fourier-Transformation eines nicht-periodischen Pulses, wie er dem in Punkt 2 genannten "Feldstärkeverlauf im Spalt" entspricht, führt auf ein kontinuierliches Frequenzspektrum.

Der "Feldstärkeverlauf im Spalt", der sich bei Annäherung des Elektrons an den Spalt und anschließender Entfernung vom Spalt ergibt, kann z.B. durch folgende Funktion modelliert werden:

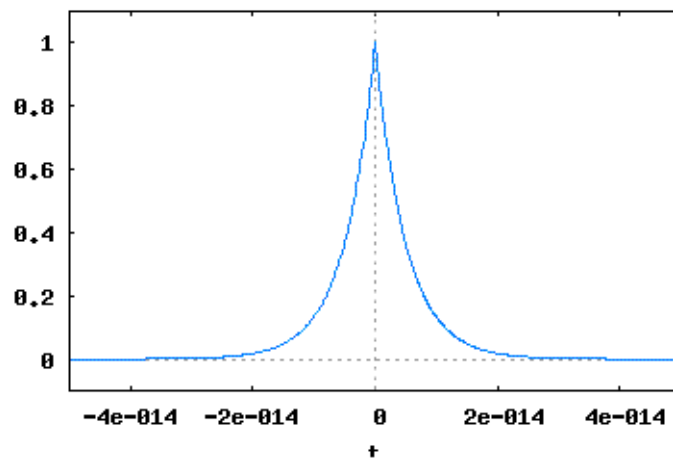
$$f(t) = e^{-|t|/\tau}$$

($t < 0$: Annäherung, $t > 0$: Entfernung)

Eine Amplitude kann nach Erfordernis hinzugefügt werden, ist für das folgende aber unerheblich.

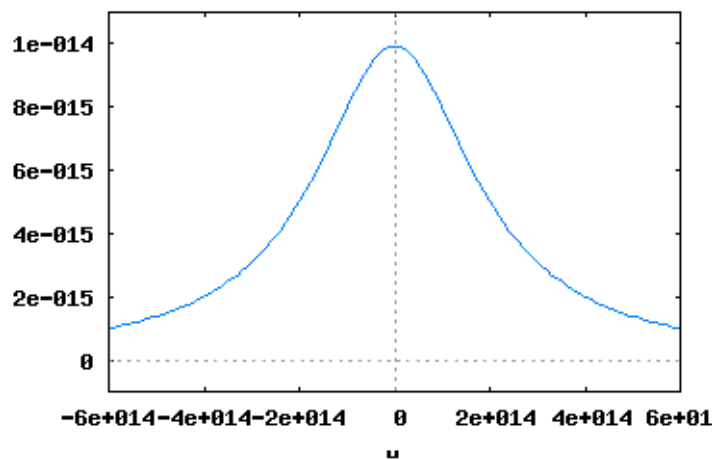
Die Zeitkonstante τ ist geeignet zu wählen. Als Orientierung dient dabei die oben genannte klassische Durchflugzeit des Elektrons durch einen Spalt: $T_F = b/v = 6,88 \cdot 10^{-15} \text{ s}$. Wählt man als Halbwertszeit für die Exponentialfunktion $T_{1/2} = T_F/2$, dann ergibt sich

$$\tau = \frac{T_F}{2 \cdot \ln(2)} = 4,96 \cdot 10^{-15} \text{ s}$$



Die Fourier-Transformierte dieser nicht-periodischen Zeitfunktion ist

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{2\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$



Es liegt keine "Reihe von monochromatischen Wellen" vor, sondern ein kontinuierliches Frequenzspektrum und damit auch ein kontinuierliches Wellenlängenspektrum. Damit ergäbe sich nicht das experimentell beobachtete Interferenzmuster, das von einer monochromatischen Welle der Wellenlänge 50 pm erzeugt wird.

7. Die Annahme, dass nicht der Feldstärkeverlauf im Spalt, sondern die "Änderungsgeschwindigkeit der Feldstärke" (also die Änderungsrate der Feldstärke) zur Erzeugung einer elektromagnetischen Welle führen soll, ist ebenfalls nicht zutreffend, wie folgende Überlegung zeigt:

Der Doppelspalt befinde sich an der Position $x = 0$. Wenn die Elektronen zur Zeit $t = 0$ den Doppelspalt durchlaufen, dann ist die zeitabhängige x -Position des Elektrons $x = vt$. Die Feldstärke am Spalt kann also in Abhängigkeit vom Abstand des Elektrons oder in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dann ergibt sich für die Änderungsrate der Feldstärke

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dE}{dx} \cdot v.$$

Weiter folgt

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dE}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(v \cdot \frac{dE}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(v \cdot \frac{dE}{dx} \right) \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{d^2 E}{dx^2} \cdot v$$

und damit:

$$\frac{d^2 E}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2 E}{dx^2}$$

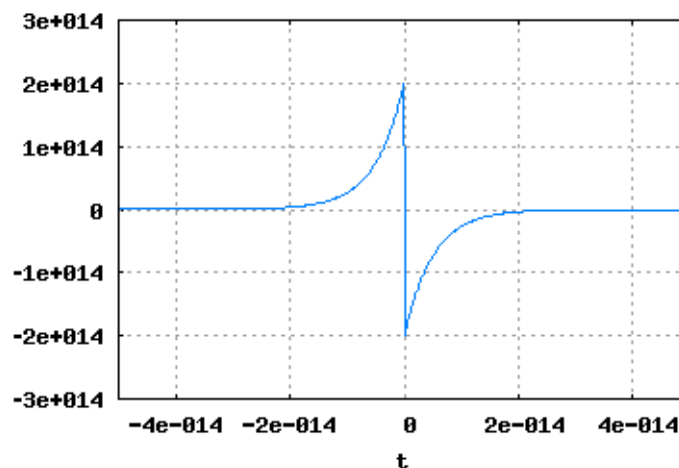
Dies stimmt nicht überein mit der Wellengleichung für die elektrische Feldkomponente einer elektromagnetischen Welle:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}$$

sondern beschreibt lediglich die raum-zeitliche Ausbreitung des elektrischen Feldes des Elektrons durch die Mitführung dieses Feldes mit dem mit der Geschwindigkeit v bewegten Elektron.

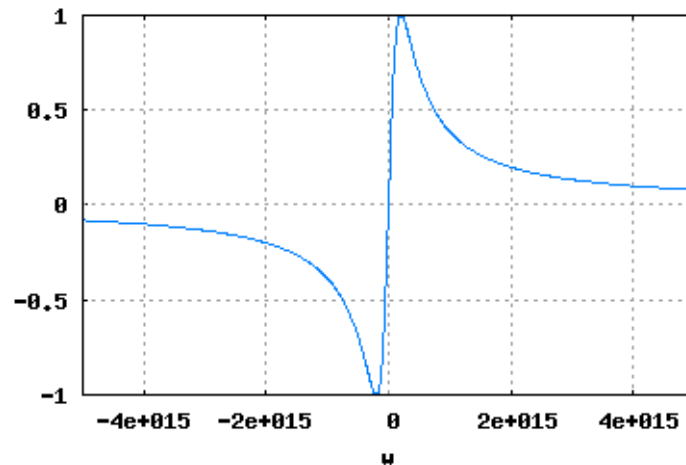
8. Für die Modellierung der Feldstärkeänderungen am Spalt $f(t)$ nach Punkt 6 ergibt sich die

Änderungsrate $\frac{df}{dt} = \frac{(-1) \cdot \text{sign}(t)}{\tau} \cdot e^{(-1) \cdot \text{sign}(t) \cdot t/\tau}$:



Nach den Regeln der Fourier-Transformation gilt: Wenn $f(t)$ eine Zeitfunktion und $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$ ihre Fourier-Transformierte ist, dann ist die Fourier-Transformierte der Ableitung df/dt gegeben durch $\mathcal{F}[df/dt] = i \omega F(\omega)$. Im vorliegenden Fall ist daher der Betrag der Fourier-Transformierten der Änderungsrate der Feldstärke

$$\omega \cdot F(\omega) = \frac{2\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$



Auch hier liegt (natürlich) keine "Reihe von monochromatischen Wellen" vor, sondern ein kontinuierliches Frequenzspektrum und damit auch ein kontinuierliches Wellenlängenspektrum. Damit ergäbe sich wieder nicht das experimentell beobachtete Interferenzmuster, das von einer monochromatischen Welle der Wellenlänge 50 pm erzeugt wird.

9. Das Interferenzmuster zeigt weiter, dass beide Spalte mit gleicher Amplitude angeregt werden. Bei der "Anregung durch das elektrische Feld des Elektrons" ist dies wegen der Abstände der Einzelspalte und der Dicke des Doppelspaltes nicht möglich.

Schlussfolgerung:

Die Ergebnisse des vorliegenden Doppelspaltversuchs mit Elektronen lassen sich nicht auf klassische Weise mit elektromagnetischen Wellen erklären.

Anhang

A1 Herleitung der Intensitätsverteilung

A1.1 Intensitätsverteilungen für klassische Wellen

Für die interferierenden harmonischen *Wellen gleicher Frequenz aber mit verschiedenen Amplituden* wird zur rechnerischen Vereinfachung die komplexe Darstellung verwendet:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= A_1 \cdot e^{i(\omega t - kx)} \\ f_2(x, t) &= A_2 \cdot e^{i(\omega t - kx + \delta)} \end{aligned}$$

Die Resultierende im Interferenzpunkt ist

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f_1(x, t) + f_2(x, t) = A_1 \cdot e^{i(\omega t - kx)} + A_2 \cdot e^{i(\omega t - kx + \delta)} \\ &= (A_1 + A_2 \cdot e^{i\delta}) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned}$$

Die Intensität ergibt sich aus dem Amplitudenquadrat:

$$\begin{aligned} f(x, t) \cdot f^*(x, t) &= (A_1 + A_2 \cdot e^{i\delta}) \cdot e^{i(\omega t - kx)} \cdot (A_1 + A_2 \cdot e^{-i\delta}) \cdot e^{-i(\omega t - kx)} \\ &= A_1^2 + A_1 A_2 \cdot e^{i\delta} + A_1 A_2 \cdot e^{-i\delta} + A_2^2 \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2 \cdot (e^{i\delta} + e^{-i\delta}) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $e^{i\delta} = \cos(\delta) + i \sin(\delta)$ und $e^{-i\delta} = \cos(\delta) - i \sin(\delta)$ folgt

$$f(x, t) \cdot f^*(x, t) = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \cos(\delta)$$

Mit der trigonometrischen Identität $\cos(2z) = \cos^2(z) - \sin^2(z)$ kann umgeformt werden:

$$f(x, t) \cdot f^*(x, t) = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right)$$

Um die vollständige Intensitätsverteilung zu erhalten ist wieder mit der Beugungsverteilung für den Einzelspalt zu modulieren, und es ergibt sich die in 4.1 angegebene Beziehung:

$$I(\alpha) = \frac{\sin^2\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d}\right)}{\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d}\right)^2} \cdot \left(A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 A_2 \cdot \left(\cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \right) \right) \quad \text{mit } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \sin(\alpha).$$

Die Intensitätsverteilung interferierender Wellen mit *gleichen Amplituden* $A_1 = A_2 = A$ lässt sich natürlich auch aus dieser Beziehung herleiten:

$$\begin{aligned}
2 A^2 + 2 A^2 \cdot \left(\cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{\delta}{2} \right) \right) &= 2 A^2 + 2 A^2 \cdot \cos(\delta) \\
&= 2 A^2 \cdot (1 + \cos(\delta)) \\
&= 4 A^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(\delta)) \\
&= 4 A^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die trigonometrische Identität $\cos\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(z))}$ verwendet wurde.

Abschließend ergibt sich

$$I(\alpha) = 4 A^2 \cdot \frac{\sin^2 \left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d} \right)}{\left(\frac{\delta \cdot a}{2 \cdot d} \right)^2} \cdot \cos^2 \left(\frac{\delta}{2} \right)$$

A1.2 Intensitätsverteilungen für Materiewellen

Die Energie eines freien Elektrons $E = \frac{p^2}{2m_e}$ kann mithilfe seiner de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{p}$

beschrieben werden. Zunächst ergibt sich aus der de Broglie-Beziehung der Impuls: $p = \frac{h}{\lambda}$. Es ist

üblich, statt der Wellenlänge die Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ zu verwenden, mit der sich der Impuls dann schreibt als

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi} = k \cdot \hbar$$

Für die Energie des Elektrons ergibt sich damit:

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

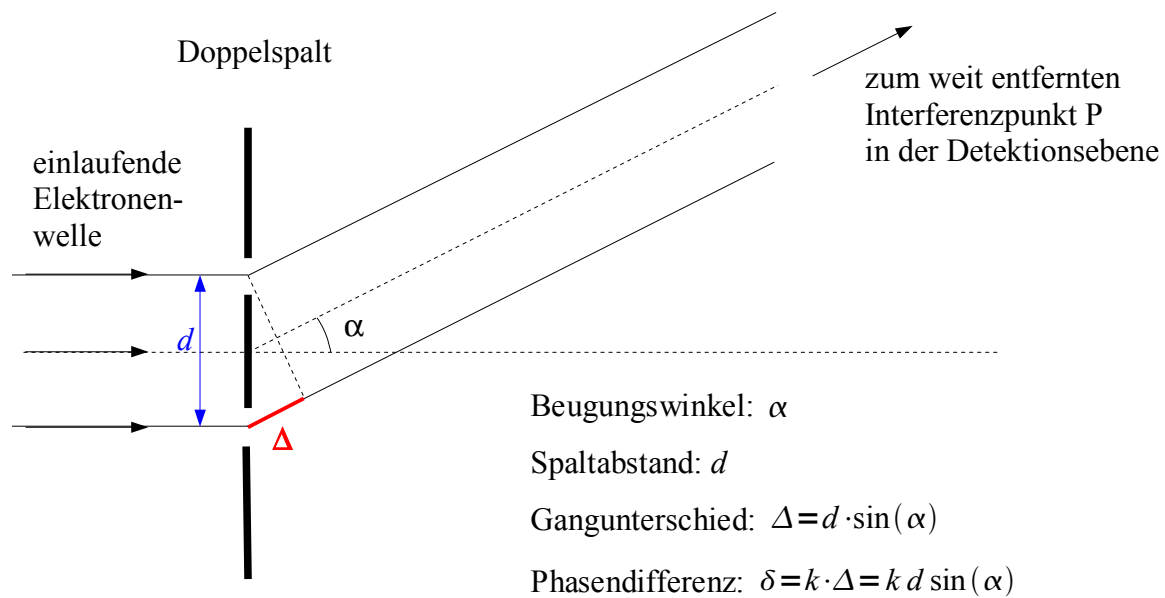
Die eindimensionale Schrödinger-Gleichung für ein freies Elektron, das sich in r -Richtung bewegt und die Energie E hat, lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2 \Psi(r, t)}{\partial r^2} = i \hbar \cdot \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist die ebene Wellenfunktion:

$$\Psi(r, t) = A \cdot \phi(r) \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = A \cdot e^{i k r} \cdot e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

Wird der Doppelspalt von der einlaufenden Elektronenwelle erreicht, gehen von den beiden Spalten zwei Materiewellen aus, die mit einem vom Beugungswinkel bestimmten Phasenunterschied in der weit entfernten Detektionsebene interferieren.



Elektronenwelle von Spalt 1: $\Psi_1(r, t) = A \cdot e^{ikr} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = A \cdot e^{i\left(kr - \frac{E}{\hbar}t\right)}$

Elektronenwelle von Spalt 2: $\Psi_2(r, t) = A \cdot e^{i\left(kr - \frac{E}{\hbar}t + \delta\right)}$

Resultierende im (weit entfernten) Interferenzpunkt in der Detektionsebene:

$$\Psi(r, t) = \Psi_1(r, t) + \Psi_2(r, t) = A \cdot e^{i\left(kr - \frac{E}{\hbar}t\right)} \cdot (1 + e^{i\delta})$$

Die Wellenfunktion ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude. Nach den Grundprinzipien der Quantenmechanik ergibt sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch das Quadrat des Absolutbetrages der Wahrscheinlichkeitsamplitude. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Elektronenlokalisationen in der Detektionsebene (Intensitätsverteilung) ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned} I &= |\Psi(r, t)|^2 = \Psi(r, t) \cdot \Psi^*(r, t) \\ &= \left[A \cdot e^{i\left(kr - \frac{E}{\hbar}t\right)} \cdot (1 + e^{i\delta}) \right] \cdot \left[A \cdot e^{-i\left(kr - \frac{E}{\hbar}t\right)} \cdot (1 + e^{-i\delta}) \right] \\ &= A^2 \cdot (1 + e^{i\delta}) \cdot (1 + e^{-i\delta}) \\ &= A^2 \cdot 2 \cdot (1 + \cos(\delta)) \\ &= 2 A^2 \cdot (1 + \cos(k d \sin(\alpha))) \end{aligned}$$

Wegen der endlichen Breite der Einzelspalte ist die Amplitude noch mit der Beugungsverteilung für den Einzelspalt moduliert (die sich aus der Integration über die Spaltbreite ergibt). Die Intensitätsverteilung der Elektronenlokalisationen lautet dann vollständig:

$$I(\alpha) = A^2 \cdot 2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{ka}{2} \cdot \sin(\alpha)\right)}{\left(\frac{ka}{2} \cdot \sin(\alpha)\right)^2} \cdot (1 + \cos(k d \sin(\alpha)))$$

Mit der Beziehung $\cos^2(z) = \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos(2z))$ ergibt sich:

$$I(\alpha) = A^2 \cdot 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{k a}{2} \cdot \sin(\alpha)\right)}{\left(\frac{k a}{2} \cdot \sin(\alpha)\right)^2} \cdot \cos^2\left(\frac{k d}{2} \sin(\alpha)\right)$$

Wird nun noch $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ eingesetzt, so wird daraus

$$I(\alpha) = A^2 \cdot 4 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)\right)^2} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin(\alpha)\right).$$

Dies stimmt formal mit der in 4.1 unter Verwendung von reellen harmonischen Wellen hergeleiteten Intensitätsverteilung überein.

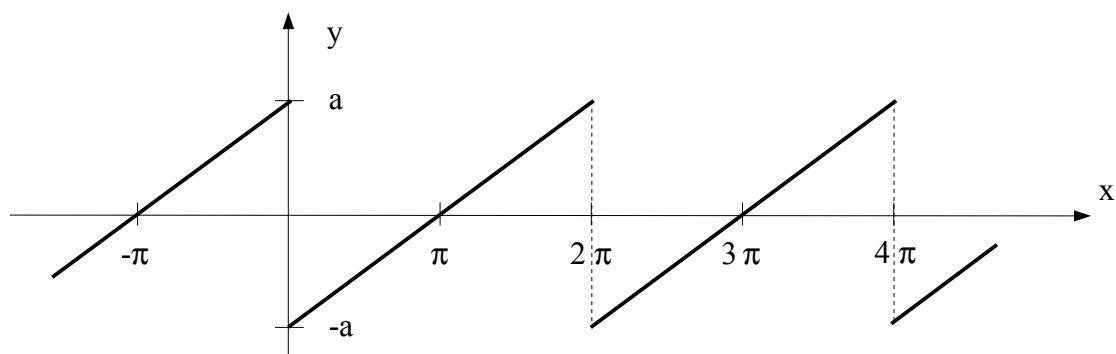
A2 Fourier-Reihenentwicklung periodischer Funktionen

Ein "alternativer" Versuch, den Doppelspaltversuch mit Elektronen in klassischer Weise durch elektromagnetische Wellen erklären zu wollen, geht von der Vorstellung aus, dass die Änderungsrate der vom Elektron im Spalt hervorgerufenen elektrischen Feldstärke in eine Fourier-Reihe entwickelt werden kann, und die einzelnen Harmonischen dann entsprechende elektromagnetische Wellen anregen.

Dazu ist zum einen zu sagen, dass die Anregung durch ein Elektron *keine periodische Funktion* darstellt, sondern einen nicht-periodischen Puls: Die Elektronen werden mit zeitlichem Abstand von etwa 1 s auf den Doppelspalt geschossen, was bedeutet, dass das jeweils vorangegangene längst detektiert ist, wenn das jeweils nachfolgende startet.

Die folgenden Überlegungen sollen daher nur verdeutlichen, was bei periodischer Anregung zu erwarten wäre. Dabei entsteht dasselbe Problem wie in 4.3 bei Verwendung des nicht-periodischen Pulses geschildert: Es würde keine monochromatische Welle entstehen sondern ein (diesmal diskretes) Spektrum aus verschiedenen Wellenlängen. Dies würde zu einem Interferenzmuster führen, das sich deutlich von dem beobachteten unterscheiden würde.

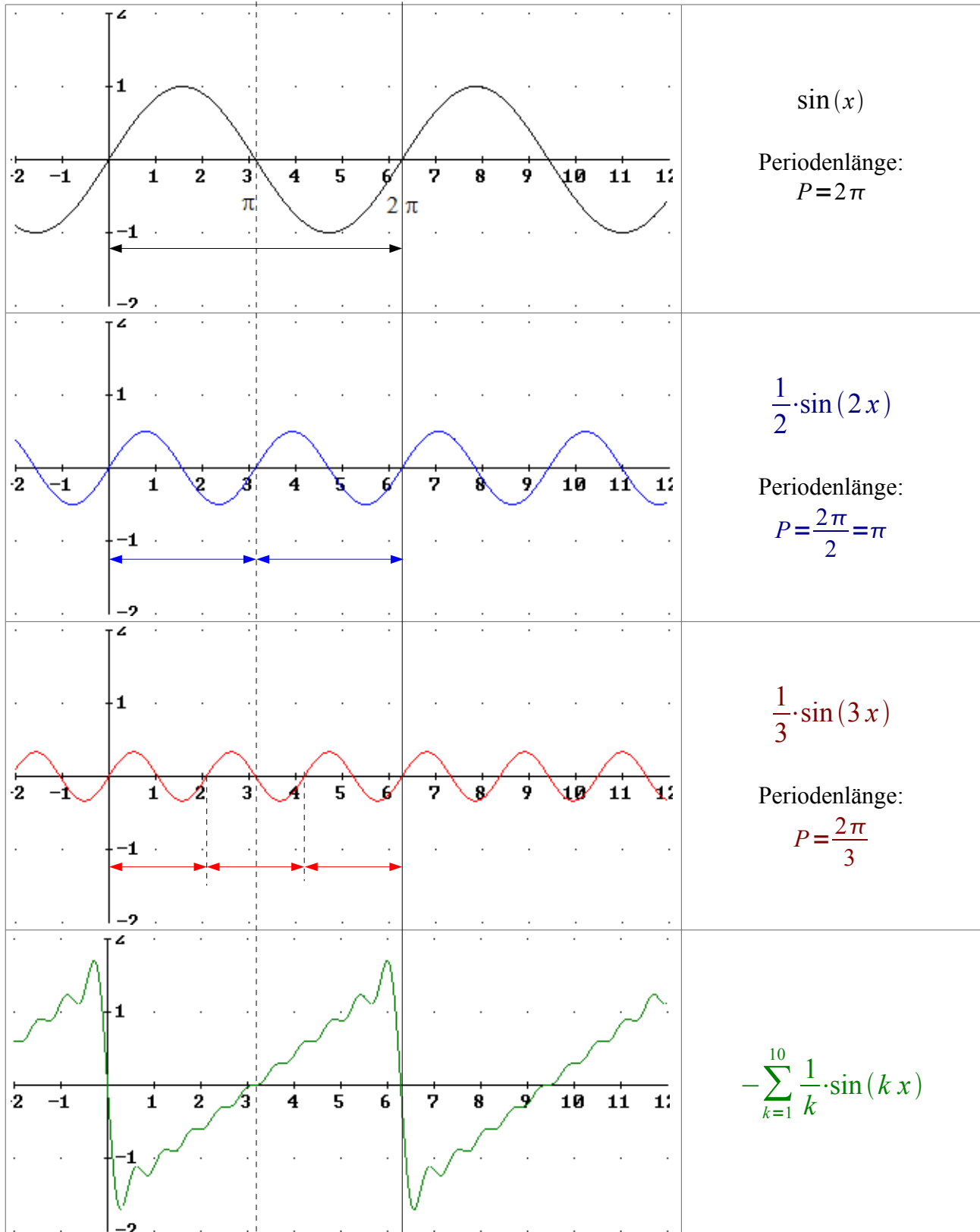
Erstes Beispiel: Sägezahn-Funktion



Die Fourier-Reihe lautet:

$$f(x) = -\frac{2a}{\pi} \cdot \left[\sin(x) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \dots \right]$$

Einzeldarstellung der ersten 3 Summanden sowie der Summe der ersten 10 Summanden:



Für die n-te Harmonische $\frac{1}{n} \cdot \sin(nx)$ ergibt sich die Periodenlänge $x = 0 \dots \frac{2\pi}{n}$.

Der Übergang zu Zeitfunktionen erfolgt durch die Transformation

$$x = \omega t = 2\pi f \cdot t = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

f : Frequenz ; T : Periodendauer

Die Grundschwingung hat die Frequenz f_1 :

$$\sin(x) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi f_1 \cdot t)$$

und die Frequenzen der Harmonischen sind ganzzahlige Vielfache dieser Grundfrequenz:

$$\sin(nx) = \sin(n \cdot \omega t) = \sin(n \cdot 2\pi f_1 \cdot t) = \sin(2\pi \cdot n f_1 \cdot t) = \sin(2\pi \cdot f_n \cdot t)$$

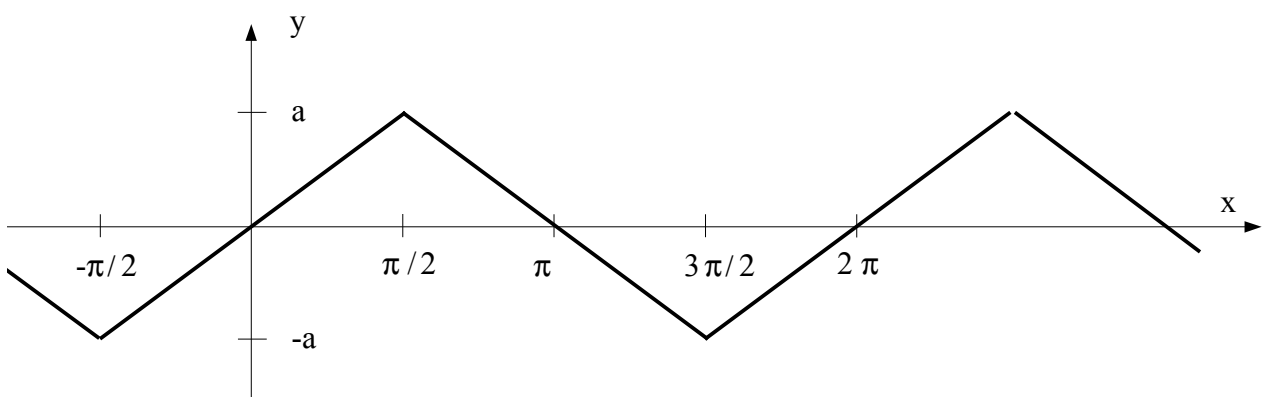
Da die einzelnen Harmonischen elektromagnetische Wellen im Spalt anregen sollen, ist nun die zugehörige Wellenlänge zu betrachten: $\lambda = \frac{c}{f}$. Für die Anregung mit der Grundfrequenz f_1 ergibt

sich die Grund-Wellenlänge $\lambda_1 = \frac{c}{f_1}$, und für die höheren Harmonischen folgt:

$$\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{c}{n f_1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{c}{f_1} = \frac{1}{n} \cdot \lambda_1$$

Die Interferenz dieser hypothetischen Wellen würde ein Interferenzmuster ergeben, das sich vom experimentell beobachteten stark unterscheiden würde, denn das beobachtete Interferenzmuster wird von *einer* monochromatischen Welle der Wellenlänge 50 pm erzeugt.

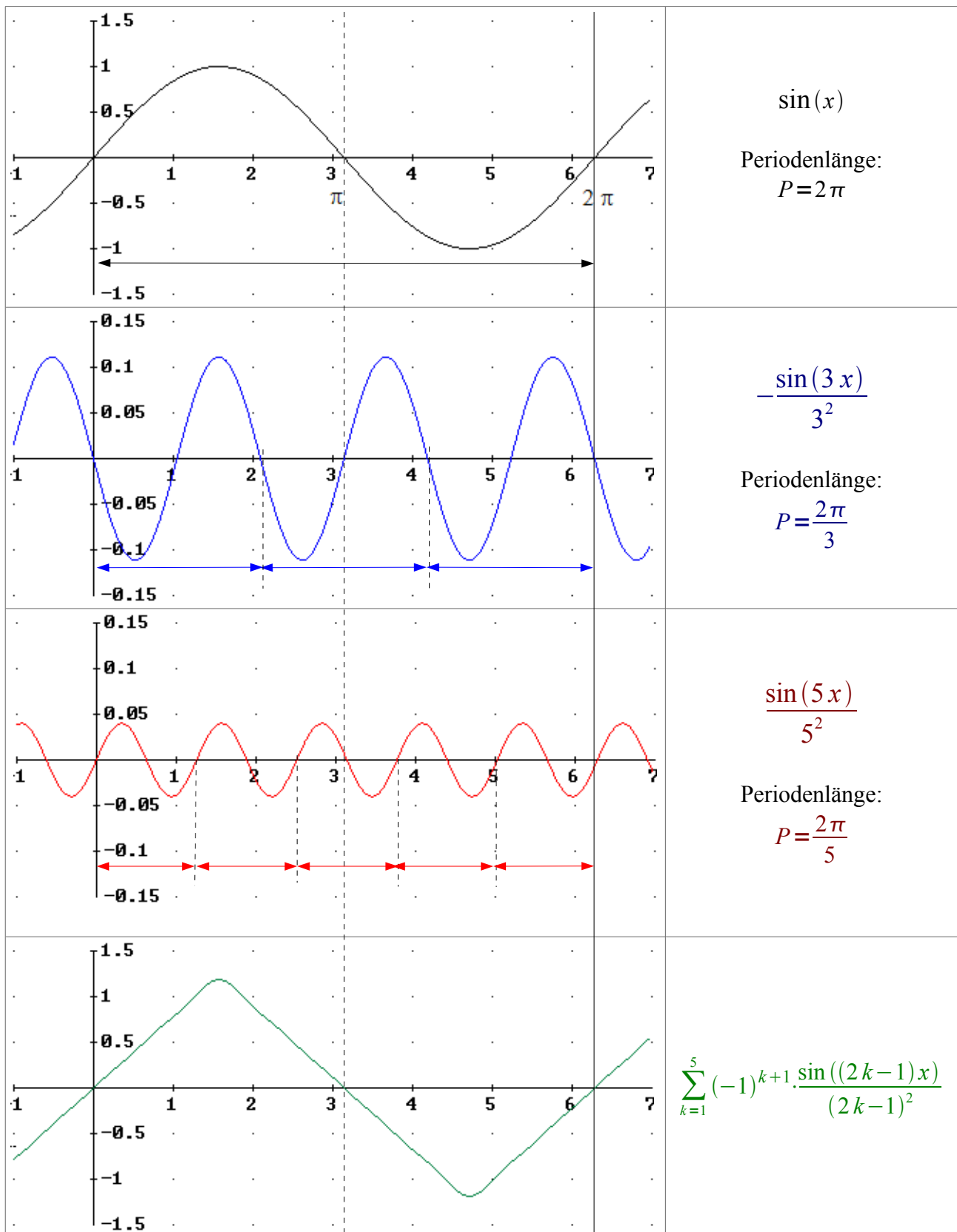
Zweites Beispiel: Dreieckskurve



Die Fourier-Reihe lautet:

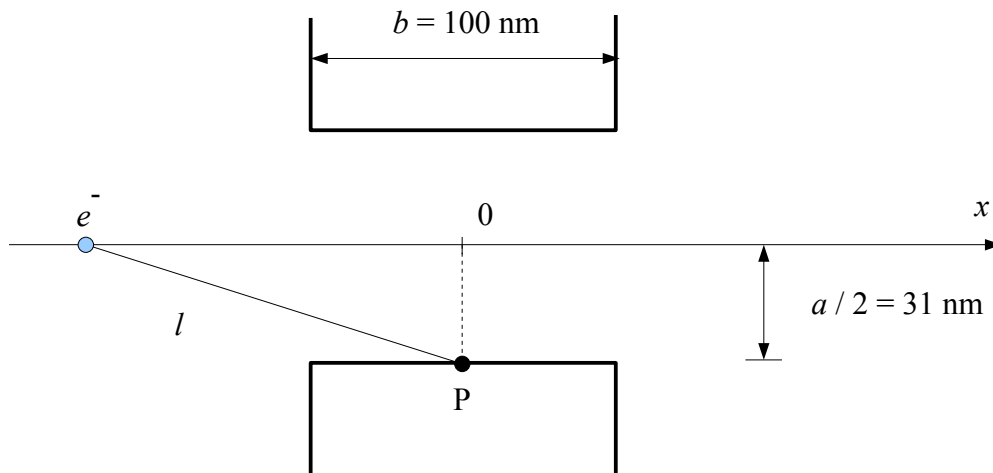
$$f(x) = \frac{8a}{\pi^2} \left[\frac{\sin(x)}{1^2} - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \dots \right]$$

Einzelanstellung der ersten 3 Summanden sowie der Summe der ersten 5 Summanden:



A3 Die Änderungsrate der Feldstärke am Spalt

Der Doppelspalt befinde sich an der Position $x = 0$. Wenn die Elektronen zur Zeit $t = 0$ den Doppelspalt durchlaufen, dann ist die zeitabhängige x -Position des Elektrons $x = vt$. Die Feldstärke an einem Spalt kann also in Abhängigkeit vom Abstand des Elektrons vom "Anregungspunkt" P oder in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden.



Nimmt man das Coulomb-Feld des Elektrons an, so ist

$$E(l) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{l^2} = k \cdot \frac{1}{l^2}$$

(Dies trifft zwar wegen der Goldbeschichtung der Doppelspaltmembran nicht zu, kann aber als verdeutlichendes Beispiel für die in 4.3, Punkt 7 angegebene allgemeine Betrachtung verwendet werden.)

Mit der Entfernung x und der halben Spaltbreite ergibt sich die Ortsfunktion

$$E(x) = k \cdot \frac{1}{x^2 + (a/2)^2}$$

und mit $x = vt$ die Zeitfunktion:

$$E(t) = k \cdot \frac{1}{(vt)^2 + (a/2)^2}$$

(1) Die Änderungsrate der Feldstärke ist dann

$$\frac{dE}{dt} = -2kv \cdot \frac{vt}{((vt)^2 + (a/2)^2)^2}$$

und deren Änderungsrate beträgt

$$\frac{d^2E}{dt^2} = -2kv^2 \cdot \frac{-3 \cdot (vt)^2 + (a/2)^2}{((vt)^2 + (a/2)^2)^3}$$

(2) Mit den entsprechenden Ableitungen nach dem Ort ergibt sich:

$$\frac{dE}{dx} = -2k \cdot \frac{x}{((x)^2 + (a/2)^2)^2}$$

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = -2k \cdot \frac{-3 \cdot x^2 + (a/2)^2}{(x^2 + (a/2)^2)^3}$$

(3) Da $v t = x$ ist, können die Ableitungen verglichen werden:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= -2k v \cdot \frac{v t}{((v t)^2 + (a/2)^2)^2} \\ &= -2k v \cdot \frac{x}{((x)^2 + (a/2)^2)^2} \\ &= v \cdot \left(-2k \cdot \frac{x}{((x)^2 + (a/2)^2)^2} \right) \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = v \cdot \frac{dE}{dx}}$$

und:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E}{dt^2} &= -2k v^2 \cdot \frac{-3 \cdot (v t)^2 + (a/2)^2}{((v t)^2 + (a/2)^2)^3} \\ &= -2k v^2 \cdot \frac{-3 \cdot x^2 + (a/2)^2}{(x^2 + (a/2)^2)^3} \\ &= v^2 \cdot \left(-2k \cdot \frac{-3 \cdot x^2 + (a/2)^2}{(x^2 + (a/2)^2)^3} \right) \end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\frac{d^2 E}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2 E}{dx^2}}$$

Die Gleichungen für die zeitlichen Änderungsraten beschreiben also lediglich die raum-zeitliche Ausbreitung des elektrischen Feldes des Elektrons durch die Mitführung dieses Feldes mit dem mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegten Elektron. Eine Erzeugung elektromagnetischer Wellen ist damit nicht verbunden.